



Instituto de Física



FAP 2292

Notas de Aula 2
Campo da Matéria Magnetizada

Prof. Valdir Bindilatti
16 de abril de 2009

Notas revistas por:

Prof. Daniel Cornejo

Sumário

2	Campo Magnético da Matéria Magnetizada	3
2.1	Momento angular e momento magnético	3
2.2	Momentos magnéticos atômicos	4
2.3	Descrição da matéria magnetizada: o vetor magnetização, M	5
2.4	O campo da matéria magnetizada: correntes de magnetização	7
2.5	Lei de Ampère na presença de matéria magnetizada: o campo H	11
2.6	Propriedades de Materiais Magnéticos	12
2.7	Exemplos	15
2.7.1	Solenóide com núcleo magnético	15
2.7.2	Ímã cilíndrico uniformemente magnetizado	16

2

Campo Magnético da Matéria Magnetizada

O campo magnético é produzido por cargas em movimento. Até aqui estudamos o campo magnético produzido por correntes elétricas. Elas representam cargas em movimento através de distâncias macroscópicas dentro de materiais condutores (fios, bobinas, etc.). Nestas notas de aula vamos estudar o campo magnético da *matéria magnetizada*, como um ímã, por exemplo. O campo magnético nestes casos não é devido a correntes macroscópicas, mas ao movimento de cargas ao nível atômico a que está associado um *momento de dipolo magnético*.

Nas seções 2.1 e 2.2 são discutidas a origem e algumas propriedades dos momentos magnéticos atômicos. Elas foram incluídas nestas notas com o objetivo de dar uma visão do que ocorre ao nível atômico na matéria magnetizada. Entretanto, as seções subsequentes são completamente independentes dos detalhes discutidos nestas duas primeiras seções. Assim, elas podem ser ignoradas na leitura destas notas.

2.1 Momento angular e momento magnético

A compreensão detalhada da origem e comportamento dos *dipolos magnéticos atômicos* só é possível no âmbito da Mecânica Quântica. Entretanto, podemos entender alguma coisa a respeito através de um modelo clássico. O protótipo de um dipolo magnético é um anel de corrente. Um modelo mais elementar ainda é uma carga elétrica numa órbita circular em torno de um centro fixo. Considere a órbita circular de uma partícula puntiforme de massa m e carga negativa $-e$, como ilustrado na Figura 2.1. Uma grandeza mecânica fundamental em qualquer movimento de rotação é o *momento angular*

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

No caso de uma órbita circular de raio $r = |\mathbf{r}|$ e velocidade $v = |\mathbf{v}|$ o vetor momento angular é perpendicular ao plano da órbita, como indicado na figura, e seu módulo é

$$L = mrv.$$

Como a partícula é carregada, ao seu movimento de rotação está associada uma corrente elétrica que também circula em torno do centro de rotação. Qualquer ponto da órbita é atravessado pela carga $-e$ a cada período do movimento, $T = 2\pi r/v$. Assim, a corrente média é, em módulo,

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}.$$

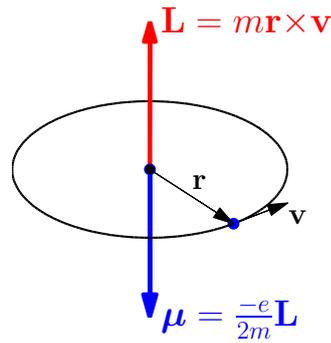


Figura 2.1: Relação entre o momento angular \mathbf{L} e o momento de dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$ de uma partícula puntiforme de massa m e carga $-e$ num movimento orbital. Se a carga fosse positiva os vetores \mathbf{L} e $\boldsymbol{\mu}$ teriam o mesmo sentido.

Como a área envolvida por esta corrente é $A = \pi r^2$, o movimento orbital resulta num momento de dipolo magnético de módulo

$$\mu = IA = \frac{1}{2}erv.$$

Note que o produto rv aparece tanto na expressão de L quanto na expressão de μ , no primeiro caso multiplicado pela massa m e no segundo pela carga e . Assim, podemos descrever a relação entre os dois vetores na forma

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}. \quad (2.1)$$

O importante é que o momento magnético é proporcional ao momento angular. No caso, porque a carga foi tomada como negativa (como a do elétron), os dois vetores se opõem. Se tomássemos uma carga positiva, ambos os vetores teriam o mesmo sentido.

Esta relação entre \mathbf{L} e $\boldsymbol{\mu}$, que foi deduzida no caso simples de uma órbita circular, é na verdade um resultado geral. Ela vale qualquer que seja o movimento orbital de uma partícula puntiforme.

2.2 Momentos magnéticos atômicos

Quando se tratam de elétrons em átomos a idéia de órbita não se aplica mais. Entretanto, o momento angular continua sendo uma grandeza fundamental que têm algumas propriedades muito interessantes. Por exemplo, o momento angular é *quantizado*: a componente de \mathbf{L} ao longo de uma direção qualquer fixa \hat{z} , que chamamos de L_z , só pode assumir valores iguais a múltiplos inteiros de uma unidade fundamental,

$$L_z = \frac{h}{2\pi}m_\ell.$$

Aqui m_ℓ é um inteiro (positivo, negativo ou nulo) e $h = 6,6261 \times 10^{-34}$ J·s é uma constante universal denominada *constante de Planck*. Nos átomos os valores de m_ℓ são números pequenos. Substituindo esta forma para L_z na equação (2.1) obtemos

$$\mu_z = -\frac{eh}{4\pi m}m_\ell,$$

que resulta numa quantização também para uma componente qualquer do vetor momento de dipolo magnético. Sua componente ao longo de uma direção qualquer assume valores que são múltiplos inteiros de uma unidade básica, $eh/4\pi m$, característica da partícula envolvida. Para o elétron esta unidade básica se chama *magneton de Bohr*, que com $e = 1,6022 \times 10^{-19}$ C e $m_e = 9,1094 \times 10^{-31}$ kg vale¹

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = 0,9274 \times 10^{-23} \text{ A}\cdot\text{m}^2.$$

Até agora consideramos o momento angular associado ao movimento orbital do elétron. O elétron tem um outro tipo de momento angular, chamado momento angular de *spin*. A regra de quantização para o spin do elétron é

$$S_z = \frac{h}{2\pi} m_s,$$

onde m_s , o número quântico de spin, só pode assumir os valores $+1/2$ e $-1/2$. Este é um momento angular intrínseco, que todo elétron tem, independentemente do seu estado de movimento. Uma característica importante do spin é que o momento magnético associado a ele é praticamente o dobro do esperado:

$$\mu_z = 2,0023 \mu_B m_s.$$

Esta *anomalia*, previne que o spin seja interpretado como proveniente da rotação do elétron em torno de si mesmo. Até onde sabemos, o elétron é uma partícula puntiforme, e o momento angular de spin é de origem relativística, sem nenhuma possibilidade de ser entendido classicamente.

Um elétron de um átomo tem, então, um momento angular total que é a soma dos momentos angulares orbital e de spin, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Porque a relação entre os momentos magnéticos orbital e de spin e os respectivos momentos angulares é diferente, o momento magnético total, em geral, não é paralelo ao momento angular total. Entretanto as componentes $J_z = \frac{h}{2\pi} m_j$ e μ_z mantêm uma relação de proporcionalidade que é expressa como

$$\mu_z = -g \mu_B m_j. \quad (2.2)$$

O fator adimensional g (chamado *fator de Landé*) é um número da ordem de 1, que depende da particular combinação de \mathbf{L} e \mathbf{S} que resulta em \mathbf{J} . A mesma relação vale para um átomo como um todo. Neste caso \mathbf{J} é a soma dos momentos angulares de todos os seus elétrons e o número quântico m_j pode assumir valores tanto inteiros como semi-inteiros, sempre em passos unitários.

2.3 Descrição da matéria magnetizada: o vetor magnetização, \mathbf{M}

Resumindo, os átomos ou íons podem apresentar momento angular, orbital e de spin, que resultam num momento de dipolo magnético. Ocorre que, por causa do princípio

¹Note que a massa da partícula entra no denominador da expressão. Os prótons e nêutrons que compõem os núcleos atômicos também podem ter momento magnético, mas a unidade básica de momento magnético nuclear, o *magneton nuclear* $\mu_n = 5,0508 \times 10^{-27}$ A·m², é cerca de 2000 vezes menor que o magneton de Bohr, porque os prótons e nêutrons têm massa de cerca de 2000 vezes a massa do elétron. O fenômeno da *ressonância magnética nuclear* provém destes momentos magnéticos nucleares. Do ponto de vista do magnetismo, entretanto, o que domina é a contribuição muito maior dos elétrons.

de exclusão de Pauli, os elétrons se distribuem nos níveis atômicos permitidos cada um com um conjunto distinto de números quânticos. O resultado disso é que, na maioria dos materiais, os momentos angular e magnético de um átomo são nulos! Esta é a situação na maioria dos materiais. Apenas um número relativamente pequeno de elementos podem apresentar átomos ou íons com momento angular total não nulo e, conseqüentemente, um momento magnético atômico total diferente de zero. Os exemplos mais conhecidos são os elementos do grupo do ferro, como o cromo (Cr), o manganês (Mn), o próprio ferro (Fe), o cobalto (Co), e o níquel (Ni). Em determinados compostos os átomos ou íons destes elementos, com a camada $3d$ parcialmente preenchida, apresentam momentos magnéticos da ordem de μ_B . Quando isto acontece, estamos na presença de um material magnético.

Nosso objetivo é obter o campo magnético proveniente dos dipolos atômicos a nível macroscópico. O que temos que fazer para obter o campo num determinado ponto do espaço é somar as contribuições de todos os dipolos magnéticos atômicos. A Figura 2.2 ilustra o campo devido a um momento de dipolo magnético μ . As expressões apresentadas na figura representam as componentes do campo magnético em pontos longe do dipolo, ou seja a distâncias r muito maiores que as dimensões físicas do dipolo. Embora o campo de cada dipolo individual seja complicado, veremos que o resultado da soma é relativamente simples.

Uma propriedade importante do dipolo magnético é que ele é aditivo. A distâncias grandes em relação às dimensões do dipolo o campo magnético é completamente independente dos detalhes da estrutura do dipolo magnético. Assim, para computar o campo *distante*, podemos agrupar todos os dipolos atômicos que se encontram dentro de uma região *pequena* e representá-los por um único dipolo, cujo momento magnético é a soma (vetorial) dos momentos de dipolo individuais. Seja δV o volume de uma região pequena. O momento de dipolo associado a esta região será

$$\delta\mu = \sum_{i(\delta V)} \mu_i,$$

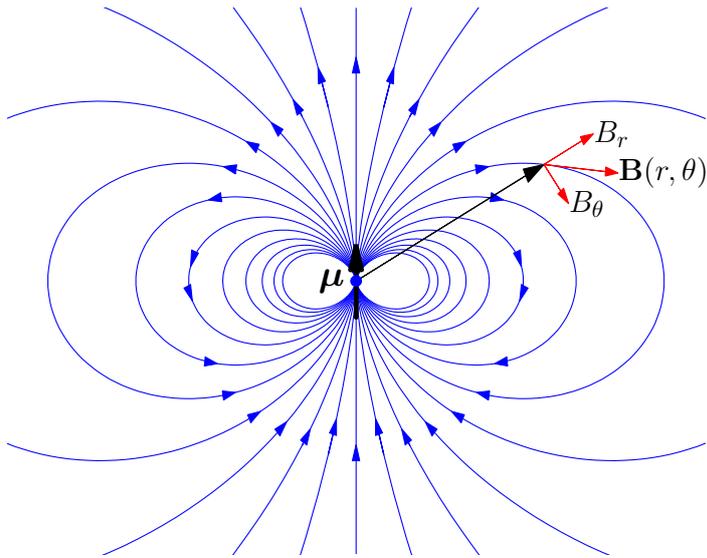
ou seja, a soma vetorial de todos os dipolos atômicos contidos dentro do volume δV . Como as dimensões dos dipolos atômicos são da ordem de $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$, mesmo uma região pequena do ponto de vista macroscópico contém um número muito grande de dipolos atômicos. Isto faz com que a razão $\delta\mu/\delta V$ seja independente de δV numa vasta gama de dimensões. Esta *densidade volumétrica de momento de dipolo magnético* constitui o que definimos como o *vetor magnetização* associado a um ponto r dentro do volume δV :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{\delta\mu}{\delta V}. \quad (2.3)$$

Note que a magnetização é um campo vetorial.

Como o dipolo magnético tem dimensão de [corrente \times área], o vetor magnetização que é a sua densidade, tem dimensão de [corrente/comprimento]. A unidade SI para a magnetização é A/m.

Por exemplo, vamos considerar a magnetização de uma amostra de ferro saturada. Isto significa que todos os momentos magnéticos atômicos estão alinhados paralelamente uns aos outros numa certa direção. O módulo do momento de dipolo magnético de um átomo de ferro é $\mu_i = 2,22\mu_B = 2,06 \times 10^{-23} \text{ A}\cdot\text{m}^2$. A densidade do ferro é $\rho = 7,874 \text{ g/cm}^3$ e sua massa atômica é $A = 55,845 \text{ g/mol}$. Assim o número de átomos de ferro por unidade de volume é $n = \rho/(A/N_A) = 8,49 \times 10^{28}/\text{m}^3$. A magnetização, em qualquer ponto no interior da amostra saturada, é $M_0 = n\mu_i = 1,75 \times 10^6 \text{ A/m}$.



$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu \cos \theta}{r^3}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu \sin \theta}{r^3}$$

Figura 2.2: Campo do dipolo magnético: r e θ são coordenadas esféricas do ponto campo. A origem do sistema de coordenadas é o centro do dipolo, cuja direção define o eixo polar a partir do qual é medido o ângulo θ

Como esta magnetização é uniforme, podemos obter o momento magnético total de uma amostra com, por exemplo, $m = 1$ g de ferro. O volume desta amostra é $V = m/\rho = 0,127 \text{ cm}^3$, o que dá um momento de dipolo magnético total $\mu = M_0 V = M_0 m/\rho = 0,222 \text{ A}\cdot\text{m}^2$. Podemos usar este momento e as fórmulas na Figura 2.2 para computar o campo magnético produzido pela amostra a distâncias grandes comparadas com suas dimensões, $V^{1/3} = 0,5 \text{ cm}$. Por exemplo, num ponto ao longo do eixo da magnetização ($\theta = 0$) a $r = 10 \text{ cm}$, o campo magnético será $B = 4,44 \times 10^{-5} \text{ T}$, paralelo ao eixo. Com $r = 1 \text{ cm}$, no mesmo eixo, obteríamos $B = 4,44 \times 10^{-2} \text{ T}$. Este resultado, entretanto, não é mais acurado. A distância ao momento magnético já é comparável às suas dimensões e o campo depende sensivelmente da forma da amostra.

2.4 O campo da matéria magnetizada: correntes de magnetização

Para obter o campo magnético de uma amostra magnetizada vamos explorar mais uma vez o fato de que o campo distante de um dipolo magnético é independente de sua estrutura. Considere um ponto da amostra onde a magnetização é \mathbf{M} . Em torno deste ponto consideramos um pequeno volume na forma de um prisma de base δA e altura δs . O prisma é orientado de forma que a altura é paralela e sua base é perpendicular ao vetor magnetização local, como ilustrado na Figura 2.3. O momento magnético total no volume $\delta V = \delta A \delta s$ é paralelo a \mathbf{M} e podemos escrever

$$\delta \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M} \delta V = M \delta A \delta s.$$

Note que, por construção, o vetor de área δA tem a mesma direção e sentido do vetor \mathbf{M} . Este momento magnético resulta dos momentos de dipolo atômicos no interior do volume. Entretanto, como o campo distante é independente dos detalhes da estrutura, podemos utilizar um modelo envolvendo correntes para substituí-lo. Podemos, por exemplo, imaginar uma corrente δI fluindo pelas faces laterais do prisma, como ilustrado

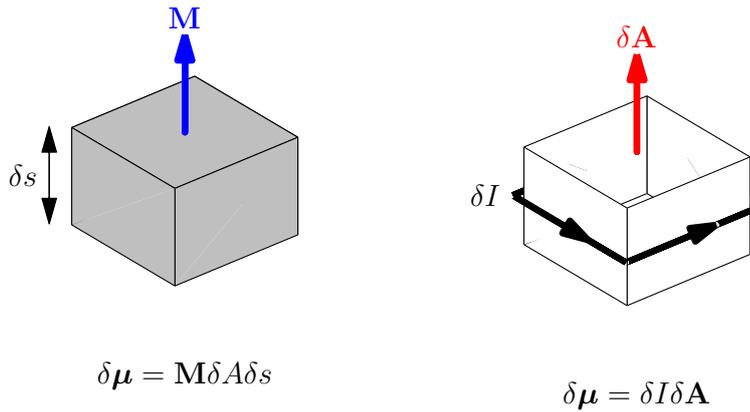


Figura 2.3: Modelo de corrente para o dipolo magnético de um pequeno pedaço de matéria magnetizada.

na mesma Figura 2.3. O momento magnético deste sistema é $\delta\mu = \delta I\delta A$. Para que os dois momentos magnéticos sejam idênticos, devemos ter

$$M\delta A\delta s = \delta I\delta A \Rightarrow \delta I = M\delta s.$$

Esta corrente com a qual modelamos os momentos magnéticos atômicos é denominada *corrente de magnetização*. Ela não é uma corrente real! É apenas uma corrente fictícia que resulta, em pontos distantes, num campo magnético idêntico ao campo dos dipolos atômicos reais.

Vamos considerar agora uma fatia de material com magnetização uniforme, conforme ilustrado na Figura 2.4. O plano da fatia é perpendicular à magnetização. Segundo o nosso modelo, dividimos a fatia em prismas muito pequenos, com altura igual à espessura da fatia δs , cada um circulado por uma corrente de magnetização $\delta I = M\delta s$. As correntes opostas nas faces adjacentes dos pequenos prismas se anulam. A distribuição de corrente de magnetização resultante é uma cinta de corrente $\delta I = M\delta s$ circulando em torno da superfície lateral da fatia. Ou seja, o campo magnético da fatia de material uniformemente magnetizado é idêntico ao campo magnético da cinta de corrente de magnetização.

É claro que isto vale estritamente para pontos fora do material, onde estamos sempre distantes de qualquer dipolo magnético atômico. No interior do material o campo magnético real é altamente não uniforme, variando significativamente em distâncias atômicas. O campo computado através do modelo de correntes de magnetização em pontos no interior do material varia suavemente, e representa uma média local do campo magnético real. O cálculo de propriedades como o fluxo do campo magnético através de uma superfície podem ser computadas com este campo médio, resultando em valores idênticos aos que seriam obtidos utilizando o campo magnético real.

Vamos agora descrever as correntes de magnetização num pedaço qualquer de material uniformemente magnetizado. Neste caso só há correntes de magnetização na superfície do material, que podemos dividir em cintas que acompanham a direção das correntes. Para nos livrarmos da espessura arbitrária δs definimos uma densidade de corrente superficial, \mathcal{I}_M , que dá a corrente por unidade de largura da cinta. Quando a face que contém a cinta é paralela à magnetização esta densidade é $\mathcal{I}_M = \frac{\delta I}{\delta s} = M$, fluindo sobre a cinta numa direção perpendicular à magnetização. Nas faces perpendiculares à magnetização, entretanto, a corrente de magnetização é nula. O resultado é que só contribui para a corrente de magnetização na superfície a componente de M paralela à

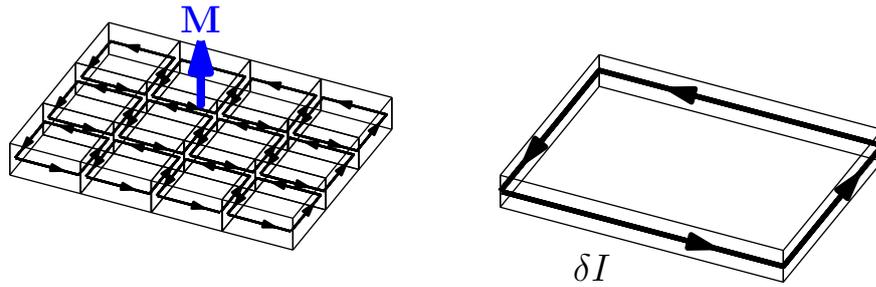


Figura 2.4: Modelo de corrente para uma fatia de material uniformemente magnetizado.

superfície, M_{\parallel} . Sendo θ o ângulo entre o vetor \mathbf{M} e a normal à superfície, a corrente por unidade de largura da cinta será dada por $\mathcal{I} = M_{\parallel} = M \sin \theta$. Isto pode ser expresso em forma vetorial. Para isso definimos a densidade de corrente superficial como um vetor, \mathcal{I}_M , que aponta na direção em que flui a corrente. O versor de área \hat{n} é um vetor unitário normal à superfície apontando para fora do material. Com isto, temos

$$\mathcal{I}_M = \mathbf{M} \times \hat{n}. \quad (2.4)$$

Esta expressão dá corretamente o tamanho e a direção do vetor \mathcal{I}_M que descreve as correntes de magnetização na superfície do material em qualquer situação.

Como exemplo, vamos descrever as correntes de magnetização num ímã cilíndrico, uniformemente magnetizado com \mathbf{M} paralelo ao seu eixo. Vamos utilizar coordenadas cilíndricas, tomando como \hat{z} a direção do eixo no sentido da magnetização, $\hat{\rho}$ o versor da componente do vetor posição perpendicular ao eixo. A direção tangente às circunferências no plano perpendicular com centro no eixo é $\hat{\phi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$. Nas bases circulares a corrente de magnetização é nula, porque $\theta = 0$. Só há corrente de magnetização na superfície lateral do cilindro, onde $\theta = \pi/2$. Nesta superfície, a densidade de corrente é $\mathcal{I}_M = M \hat{\phi}$. O resultado é que o campo magnético de tal ímã é idêntico ao campo magnético de um solenóide cilíndrico com as mesmas dimensões. Se tomarmos $n = N/L$ como a densidade de espiras, a corrente I no solenóide equivalente é determinada por $\mathcal{I}_M = nI = M$.

Quando consideramos uma magnetização uniforme ocorre o cancelamento exato das correntes de magnetização internas. Este não é o caso quando a magnetização varia com a posição dentro do material. Prismas vizinhos são circulados por correntes ligeiramente diferentes que não se cancelam, resultando em correntes de magnetização no interior do material e não apenas na sua superfície lateral. A Figura 2.5 mostra como computar a corrente de magnetização através da área de um circuito infinitesimal no interior do material magnetizado. A figura, em duas dimensões, mostra o perfil de quatro prismas vizinhos muito pequenos. Em cada prisma a magnetização é ligeiramente diferente dos outros. A corrente δI , que flui na direção \hat{y} tem duas parcelas:

- a que flui através da superfície comum vertical é devida à diferença da componente M_z da magnetização entre os prismas da esquerda e da direita;
- a que flui através da superfície comum horizontal é devida à diferença da componente M_x da magnetização entre os prismas superiores e inferiores.

Cada uma das parcelas da soma de quatro termos indicada na figura é equivalente a um passo na circuitação do vetor magnetização através do circuito infinitesimal c . O sentido indicado é dado pela regra da mão direita em relação ao sentido da corrente, \hat{y} neste caso.

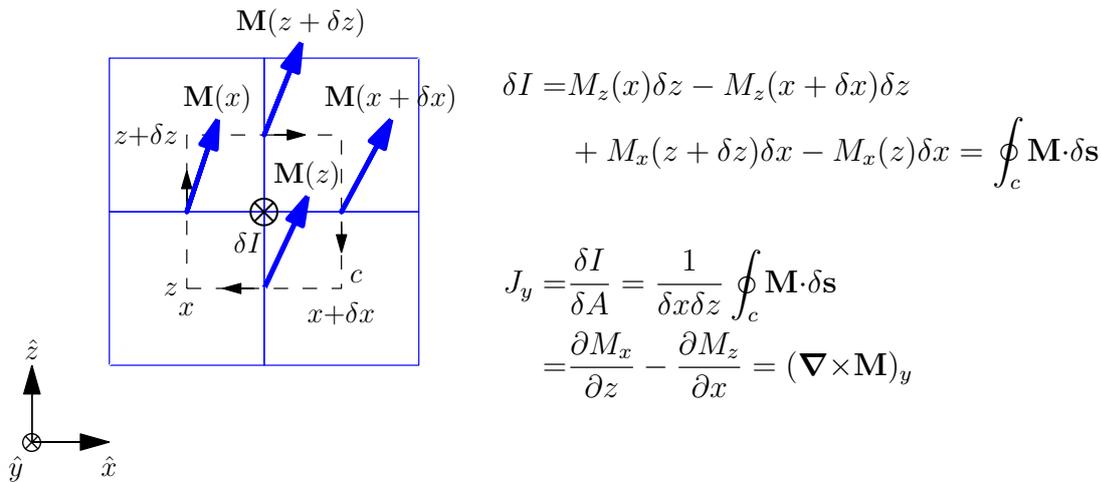


Figura 2.5: Corrente de magnetização através de um circuito infinitesimal c .

Num caso como este é conveniente descrever as correntes de magnetização através da densidade de corrente (corrente por unidade de área), de forma que $\delta I = \mathbf{J}_M \cdot \delta \mathbf{A}$. Na figura vemos que a densidade de corrente de magnetização é dada pelo *rotacional* da magnetização, $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$.

Através de um circuito infinitesimal c , portanto, a corrente de magnetização é

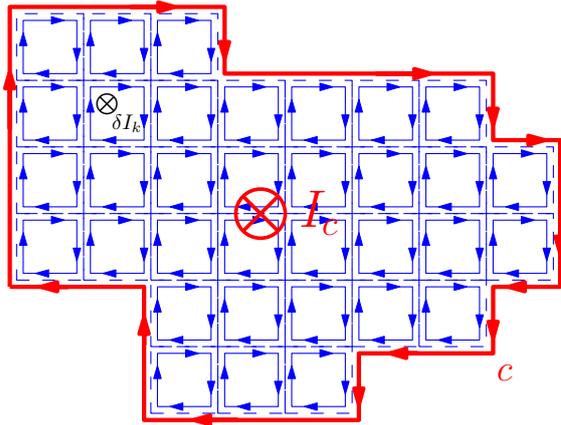
$$\delta I = \oint_c \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}.$$

A Figura 2.6 mostra como obter a corrente de magnetização através de um circuito fechado c de qualquer forma ou tamanho. O processo consiste em dividir uma superfície apoiada no circuito em um número grande de áreas infinitesimais. A corrente através de cada pequena área k , δI_k é dada pela circunferência de \mathbf{M} no circuito infinitesimal c_k que a contorna. A corrente total que atravessa o circuito c , I_c é a soma de todas as correntes δI_k . Na Figura 2.6, podemos ver que uma aresta comum a dois circuitos adjacentes é atravessada num sentido numa circunferência e no sentido oposto na circunferência vizinha. O resultado é que há o cancelamento das contribuições de todas as arestas internas que, portanto não contribuem para a soma total. As únicas arestas cujas contribuições não se cancelam são as arestas da periferia, ou seja, do próprio circuito envolvente c . O resultado é que a expressão da corrente de magnetização através de um circuito infinitesimal se aplica para qualquer circuito, de qualquer tamanho. Assim:

$$I_M = \oint_c \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}. \tag{2.5}$$

I_M é a corrente de magnetização que atravessa qualquer superfície apoiada no circuito c no sentido definido pela regra da mão direita em relação ao sentido da circunferência.

Note que esta expressão, quando aplicada a um circuito que envolve a superfície do material (passando por dentro e por fora do material), resulta numa densidade de corrente superficial idêntica à dada pela equação (2.4).



$$I_c = \sum_k \delta I_k = \sum_k \oint_{c_k} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = \oint_c \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}$$

Figura 2.6: Corrente de magnetização através de um circuito arbitrário c .

Em resumo, para modelar uma amostra de material magnetizado utilizamos as correntes de magnetização. Qualquer que seja a magnetização, sempre haverá correntes superficiais descritas pela equação (2.4). Quando a magnetização é uniforme estas são as únicas correntes de magnetização. Quando a magnetização varia dentro do material, além das correntes superficiais, há correntes de magnetização internas que podem ser obtidas pela equação (2.5).

2.5 Lei de Ampère na presença de matéria magnetizada: o campo \mathbf{H}

Numa situação genérica podemos ter a presença tanto de correntes elétricas através de condutores (espiras, bobinas, etc.) e de matéria magnetizada. O campo magnético num certo ponto do espaço é a superposição do campo de todas as fontes presentes. Vimos, entretanto, que o campo da matéria magnetizada pode ser computado substituindo os dipolos magnéticos microscópicos por uma distribuição de correntes de magnetização equivalente. As correntes de magnetização, entretanto, não estão sob nosso controle nem podem ser medidas diretamente. As correntes elétricas que fluem através de circuitos podem ser controladas ou, no mínimo, medidas. Denominamos tais correntes de *correntes livres*.

A Lei de Gauss para o campo magnético

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (2.6)$$

é independente da presença ou não de matéria magnetizada. A Lei de Ampère relaciona a circuitação do campo \mathbf{B} ao longo de um circuito fechado qualquer com a *corrente total* que atravessa uma superfície apoiada sobre o circuito. É conveniente separar a corrente total em duas parcelas: a corrente livre, I_ℓ , e a corrente de magnetização I_M e escrever a Lei de Ampère na forma:

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (I_\ell + I_M)_c \quad (2.7)$$

Um resultado interessante surge quando nesta lei substituímos a expressão (2.5) para I_M :

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\ell c} + \mu_0 \oint_c \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}.$$

Como as duas circunvoluções são ao longo de um mesmo circuito, podemos transpor o termo envolvendo \mathbf{M} para o primeiro membro e escrever

$$\oint_c (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{lc}.$$

Ou seja, a circunvolução do vetor entre parênteses é determinada apenas pela corrente livre e é independente da presença de matéria magnetizada. Para utilizar esta “simplificação”, define-se uma nova grandeza vetorial, \mathbf{H} , através da expressão

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (2.8)$$

Vamos chamar esta nova grandeza vetorial de *campo H*.² Ele é o análogo magnético do vetor deslocamento elétrico \mathbf{D} e, como este, é apenas uma construção matemática sem significado físico direto. Entretanto, o campo \mathbf{H} é importante porque é muito utilizado na prática. Pela sua definição o campo \mathbf{H} tem as mesmas dimensões que a magnetização. As unidades são também as mesmas, de forma que a unidade SI para o campo \mathbf{H} é *ampère por metro* (A/m).

Para o campo \mathbf{H} , a Lei de Ampère implica

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_l. \quad (2.9)$$

Assim a circunvolução do campo \mathbf{H} é determinada apenas pela correntes livres. Isto resulta numa grande simplificação do problema de determinar o campo magnético na presença da matéria magnetizada em muitas situações. Entretanto, vale ressaltar que às vezes o campo \mathbf{H} se comporta de maneira muito diferente de um campo magnético.³

2.6 Propriedades de Materiais Magnéticos

As leis expostas na seção anterior nos permitem, em princípio, computar o campo \mathbf{H} e o campo magnético contanto que sejam conhecidas as correntes livres e a magnetização da matéria envolvida no problema. Mas a matéria reage sob a ação de um campo magnético aplicado alterando seu estado de magnetização. O problema então deixa de ser simples. Na prática, o campo gerado pela matéria é utilizado para determinar a sua magnetização, e portanto, seu comportamento magnético. Nesta seção, vamos ver as características de alguns tipos de materiais magnéticos.

²Na literatura de magnetismo \mathbf{H} é às vezes denominado de *campo magnético* e \mathbf{B} é denominado *densidade de fluxo magnético*. Nestas notas continuaremos chamando \mathbf{B} de campo magnético e o \mathbf{H} de campo \mathbf{H} . A confusão pode ser resolvida se atentarmos para as unidades SI, que são diferentes para os dois campos: tesla (T) para \mathbf{B} e ampere/metro (A/m) para \mathbf{H} . No sistema cgs as unidades correspondentes são: gauss (G) e oersted (Oe), respectivamente.

³A razão disso vem da equação para o fluxo de \mathbf{H} através de uma superfície fechada

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} = - \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{A},$$

que segue da definição de \mathbf{H} e da Lei de Gauss para o campo magnético, equação (2.6). O membro direito desta equação tem o mesmo efeito para \mathbf{H} que as cargas elétricas tem para o campo elétrico \mathbf{E} . Veja a semelhança entre esta expressão e a expressão para as cargas de polarização num material eletricamente polarizado dada pela Equação (1.6) nas Notas de Aula 1.

Os materiais magnéticos mais simples são aqueles que têm uma resposta inicial linear e isotrópica. Isto significa que sob um campo externo eles desenvolvem uma magnetização proporcional e paralela ao campo, independente da direção em que o campo é aplicado. Para tais materiais vale a relação

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (2.10)$$

onde a constante de proporcionalidade χ é a *susceptibilidade magnética*. Para campos pequenos χ é uma constante independente do campo mas que pode depender da temperatura. Note que, porque M e H têm as mesmas dimensões, χ é uma grandeza adimensional (um número puro).

Através da definição de H , equação (2.8), obtemos

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}. \quad (2.11)$$

Assim, existe uma relação simples de proporcionalidade entre B e H para estes materiais. A nova constante definida por esta expressão, μ , é denominada *permeabilidade magnética do material*, por analogia com μ_0 . É mais usual utilizar a *permeabilidade relativa*

$$\kappa_m = 1 + \chi = \mu/\mu_0,$$

que é adimensional. Note que a equação (2.11) é uma relação entre os vetores \mathbf{B} e \mathbf{H} no mesmo ponto do espaço. A permeabilidade μ é a permeabilidade do material no mesmo ponto. Assim, por exemplo, fora do material, no vácuo, a permeabilidade é μ_0 .

Como já mencionamos, a maioria dos materiais não têm momentos magnéticos atômicos. Mesmo tais materiais reagem à aplicação de um campo magnético externo desenvolvendo magnetização. Os *materiais não-magnéticos* apresentam uma propriedade chamada *diamagnetismo*: na presença de um campo magnético eles desenvolvem uma magnetização na *direção oposta à do campo*. Isto significa, por exemplo, que quando colocados perto da borda de um solenóide energizado (ou de um ímã) eles sofrem uma *força de repulsão*. Você provavelmente nunca se deu conta disto porque o efeito é muito pequeno. A susceptibilidade magnética neste caso é negativa e muito pequena, $\chi \sim -10^{-5}$. Por isso, o efeito deste tipo de material sobre o campo magnético quase nunca é levado em conta.

Os materiais magnéticos mais importantes, do ponto de vista de aplicações, são os *ferromagnetos*. Para ilustrar vamos considerar o ferro metálico e as ferrites (uma classe de materiais cerâmicos que contém um óxido de ferro, Fe_2O_3 , de que são feitos os ímãs mais comuns). Você sabe que um ímã de ferrite atrai fortemente um pedaço de ferro, mas não um pedaço de cobre, por exemplo. O ferro, tem portanto, um tipo de magnetismo diferente do magnetismo do cobre (que é essencialmente não-magnético). Mas um pedaço de ferro, em geral, não atrai outro pedaço de ferro. As ferrites e o ferro são dois tipos diferentes de ferromagnetos.

O que caracteriza um material ferromagnético é a presença de uma interação entre os dipolos atômicos que tende a orientá-los paralelamente uns aos outros.⁴ A esta tendência se opõem a agitação térmica e outras interações. Abaixo de uma certa temperatura, característica do material, a tendência de alinhamento prevalece resultando numa correlação entre as direções dos momentos magnéticos atômicos vizinhos. Isto faz com que em pequenas regiões do material se desenvolva um momento magnético significativo, o que é denominado de *magnetização espontânea*.

⁴Esta interação se chama *interação de troca*. Ela só pode ser entendida quanticamente, mas ela tem a mesma origem que o princípio de exclusão de Pauli. A interação de troca pode ser ferromagnética, quando favorece o alinhamento paralelo dos dipolos atômicos vizinhos, ou antiferromagnética, quando favorece o alinhamento anti-paralelo dos dipolos atômicos.

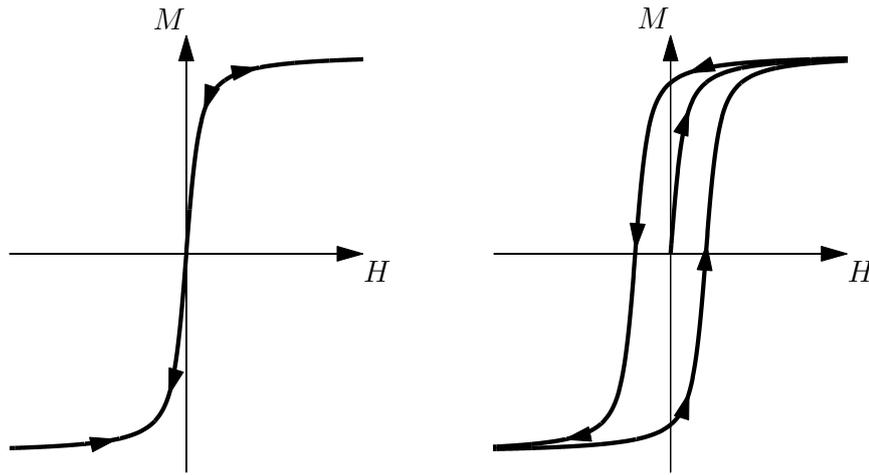


Figura 2.7: Curvas de magnetização reversíveis e irreversíveis. A curva da direita, irreversível, é denominada *curva de histerese*.

Como vimos anteriormente (final da Seção 2.3), no caso do ferro a magnetização quando os dipolos atômicos estão completamente alinhados é $M_0 = n\mu_i = 1,75 \times 10^6$ A/m. Esta é a ordem de grandeza da magnetização espontânea. O campo magnético no interior de uma região com esta magnetização, supondo $H = 0$, é $B \approx \mu_0 M_0 = 2,2$ T. Se os momentos espontâneos estivessem todos alinhados paralelamente, um campo magnético desta ordem de grandeza estaria presente em toda a amostra e no seu entorno próximo. Este campo significa uma contribuição positiva para a energia do sistema (a densidade da energia armazenada no campo magnético é $B^2/2\mu_0$). É mais favorável energeticamente que os momentos magnéticos espontâneos de pequenas regiões se orientem antiparalelamente uns aos outros. Isto anula o momento de dipolo total da amostra e efetivamente o próprio campo magnético. É por isso que não há campo magnético em torno de uma amostra natural de ferro ou de ferrite.

Quando uma amostra ferromagnética é submetida a um campo magnético externo, outra energia entra na equação: a energia da interação dos dipolos espontâneos com o campo externo. O torque magnético tende a alinhar os dipolos paralelamente ao campo, e, em consequência paralelamente uns aos outros. O resultado é o desenvolvimento de uma magnetização muito intensa. Inicialmente a resposta é linear e caracterizada por uma susceptibilidade magnética muito grande. A permeabilidade relativa κ_m pode ser da ordem de 10^3 . É claro que o regime linear, em que $M = \chi H$, só pode valer enquanto a magnetização for pequena comparada com a magnetização de saturação.

Para um material como o ferro o processo de magnetização é reversível, ou seja, se o campo H é anulado a magnetização da amostra também se anula. Isto não acontece com a ferrite. Se uma amostra de ferrite é inicialmente magnetizada pela aplicação de um campo, ao retirar-se o campo aplicado a magnetização não se anula. Isto se deve a irreversibilidades associadas ao processo de alinhamento dos dipolos espontâneos. O resultado é um ímã: um material com um momento de dipolo macroscópico permanente. É claro que as equações (2.10) e (2.11) não se aplicam neste caso.

Materiais como o ferro são chamados de ferromagnetos *moles*. Eles são utilizados em aplicações onde a reversibilidade é importante, como em núcleos de transformadores. A ferrite e outros materiais utilizados em ímãs são ferromagnetos *duros*. A Figura 2.7 ilustra as respostas magnéticas destes dois tipos de materiais.

2.7 Exemplos

2.7.1 Solenóide com núcleo magnético

Um solenóide fino de 15 cm de comprimento, com 240 espiras, está preenchido com bismuto ($\chi = -1,66 \times 10^{-5}$)

- Ignorando efeitos de borda, calcule o campo H , a magnetização do material M e o campo magnético B no interior do solenóide quando ele é percorrido por uma corrente de 2,00 A.
- Calcule as mesmas três grandezas do ítem anterior quando o bismuto é substituído por uma liga de ferro com permeabilidade relativa $\kappa_m = 400$.

Solução

- A densidade de espiras do solenóide é

$$n = \frac{240}{0,15 \text{ m}} = 1,60 \times 10^3 \text{ espiras/m.}$$

Desprezando-se os efeitos de borda, o sistema pode ser tratado como um solenóide infinito. O resultado obtido vale perto do centro do solenóide, longe das suas bordas. Neste caso o campo H é uniforme no interior do solenóide e a aplicação da lei de Ampère, eq. (2.9), fornece

$$H = nI = 3,20 \times 10^3 \text{ A/m.}$$

A magnetização pode ser encontrada pela eq. (2.10):

$$M = \chi H = -5,31 \times 10^{-2} \text{ A/m.}$$

A magnitude da magnetização M é menos de 0,002% do módulo do campo H , indicando que os efeitos de magnetização no bismuto são desprezíveis. O campo magnético no interior do material fica:

$$B = \mu_0 (H + M) \approx \mu_0 H = 4,02 \times 10^{-3} \text{ T.}$$

- No caso de um solenóide longo completamente preenchido, o campo H é independente do material em seu interior, portanto $H = 3,20 \times 10^3 \text{ A/m}$, como antes.⁵

⁵Isto só é verdade para um solenóide infinitamente longo. O próximo exemplo ilustra o fato de que as correntes livres não são as únicas fontes do campo H . A matéria magnetizada, por si só, produz um campo H na direção contrária à magnetização. Este campo, denominado *campo desmagnetizante*, tem que ser levado em conta. No caso da geometria cilíndrica este campo não é uniforme e o tratamento exato é complicado. Há situações, entretanto, em que ele é uniforme. Isto acontece quando a amostra uniformemente magnetizada tem a forma de um elipsóide de revolução. O campo H devido à magnetização neste caso se escreve simplesmente $H_M = -\alpha M$ onde α , o *fator de desmagnetização*, é um número entre 0 e 1 determinado apenas pela geometria do elipsóide. (Para uma agulha infinitamente longa $\alpha = 0$, para uma esfera $\alpha = 1/3$ e para um disco $\alpha = 1$.) Neste caso podemos escrever, para um material linear, $M = \chi H = \chi(H_\ell + H_M) = \chi(H_\ell - \alpha M)$. Isolando M , se obtém

$$M = \frac{\chi}{1 + \alpha\chi} H_\ell.$$

Assim o efeito do campo desmagnetizante é produzir uma redução da magnetização, e conseqüentemente do campo magnético, em relação ao resultado produzido apenas pelas correntes livres H_ℓ . Por falta de uma solução melhor, podemos aproximar um cilíndrico como um elipsóide de revolução cujos eixos são o semi-comprimento e o raio do cilindro. Supondo uma razão comprimento/diâmetro=10, o fator desmagnetizante seria $\alpha \approx 0,025$. O fator de redução da magnetização para $\chi = 399$ como neste exemplo seria $1 + \alpha\chi \approx 10$.

Para a magnetização a eq. (2.10), com $\chi_m = \kappa_m - 1 = 399$, resulta:

$$M = \chi H = 1,28 \times 10^6 \text{ A/m},$$

que é da mesma ordem de grandeza da magnetização de saturação $M_0 = n\mu_i = 1,75 \times 10^6 \text{ A/m}$.

Para o campo magnético obtemos:

$$B = \mu_0(H + M) = \kappa_m \mu_0 H = 1,61 \text{ T}.$$

Note que agora a maior contribuição para o campo magnético é o termo da magnetização, $\mu_0 M$, 399 vezes maior que o termo das correntes livres $\mu_0 H$.

2.7.2 Ímã cilíndrico uniformemente magnetizado

Um ímã de ferrite na forma de um cilindro de raio $a = 0,50 \text{ cm}$ e comprimento $h = 4 \text{ cm}$, tem uma magnetização uniforme de módulo $M_0 = 5,00 \times 10^5 \text{ A/m}$, paralela ao seu eixo. Determine o campo magnético e o campo H nos pontos do eixo do ímã.

Solução

Neste caso não há correntes livres presentes no sistema, de forma que a lei de Ampère para o campo H não nos levará, por si só, a nenhum resultado. O campo magnético B , entretanto, pode ser computado diretamente, como devido às correntes de magnetização. Para a magnetização descrita, a corrente de magnetização é na forma de uma cinta de corrente com densidade $\mathcal{I}_M = M_0$, que circula na superfície lateral do cilindro no sentido dado pela regra da mão direita em relação à magnetização, conforme indicado na Figura 2.8. Esta distribuição de corrente é equivalente a um solenóide cilíndrico. Neste caso não vamos desprezar os efeitos de borda, porque o campo em qualquer ponto do eixo pode ser computado pela Lei de Biot-Savart integrando a contribuição de espiras circulares. O resultado é um campo paralelo ao eixo z , $\mathbf{B}(0,0,z) = B(z) \hat{z}$, onde

$$B(z) = \frac{\mu_0 M_0}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

onde os ângulos θ_1 e θ_2 estão definidos na Figura 2.8. Para a magnetização dada $\mu_0 M_0 = B_0 = 0,628 \text{ T}$.

Definindo a origem do eixo z no centro do ímã, esta equação se expressa como

$$B(z) = \frac{\mu_0 M_0}{2} \left[\frac{h/2 - z}{\sqrt{(h/2 - z)^2 + a^2}} + \frac{h/2 + z}{\sqrt{(h/2 + z)^2 + a^2}} \right].$$

Esta função está mostrada na Figura 2.8. Note que neste caso o campo é relativamente uniforme no interior do ímã, só variando significativamente nas regiões próximas às bordas. No centro do ímã, $z = 0$, o campo tem a máxima intensidade, dada por

$$B(0) = \mu_0 M_0 \frac{h/2}{\sqrt{(h/2)^2 + a^2}} = 0,970 \mu_0 M_0 = 0,61 \text{ T}.$$

Este resultado é apenas 3% menor do que seria obtido na aproximação de solenóide infinito, B_0 . Em qualquer borda do ímã, $z = \pm h/2$, o campo é

$$B(\pm h/2) = \frac{\mu_0 M_0}{2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} = 0,496 \mu_0 M_0 = 0,31 \text{ T},$$

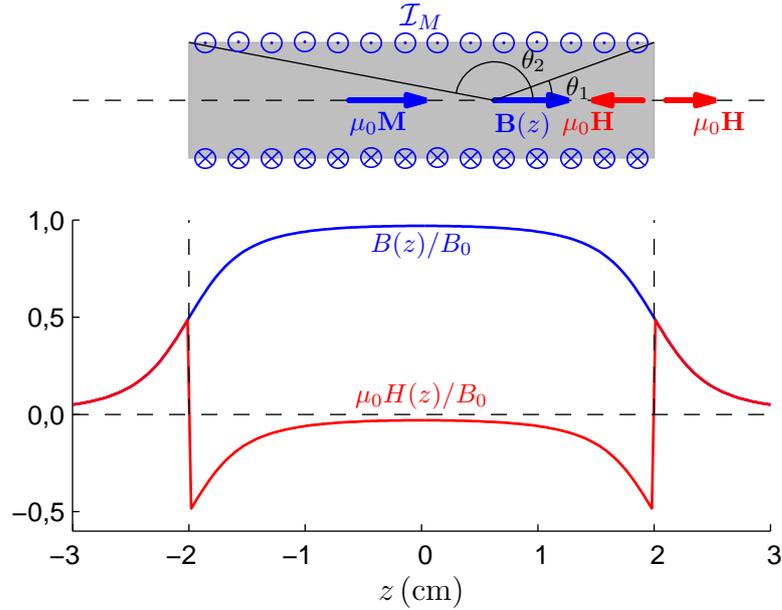


Figura 2.8: Acima: Esquema mostrando a definição dos parâmetros da equação para o campo magnético de um ímã cilíndrico. Abaixo: O campo magnético $B(z)$ e o campo $H(z)$ em pontos ao longo do eixo, normalizados pela constante $B_0 = \mu_0 M_0$.

aproximadamente a metade do campo central.

Estes resultados são exatos, dado que a magnetização é uniforme. O campo H nos pontos sobre o eixo pode ser obtido da sua definição, eq. (2.8). Como sobre o eixo z \mathbf{B} e \mathbf{M} são paralelos o vetor \mathbf{H} também será paralelo ao eixo e tem a forma $\mathbf{H}(0,0,z) = H(z) \hat{z}$. Considerando que $M = 0$ fora do ímã, teremos

$$\mu_0 H(z) = B(z) - \mu_0 M(z) = \begin{cases} B(z) - \mu_0 M_0, & |z| < h/2, \text{ dentro do ímã} \\ B(z), & |z| > h/2, \text{ fora do ímã.} \end{cases}$$

O resultado é mostrado também na Figura 2.8. Note que H é negativo no interior do ímã, ou seja o vetor \mathbf{H} aponta no sentido oposto da magnetização e do campo magnético. No centro do ímã o módulo de H passa por um mínimo. Neste ponto temos

$$H(0) = \frac{B(0)}{\mu_0} - M_0 = -0,15 \times 10^5 \text{ A/m.}$$

Nas bordas do ímã, pelo lado de dentro, temos

$$H(\pm h/2) = \frac{B(h/2)}{\mu_0} - M_0 = -2,52 \times 10^5 \text{ A/m.}$$

Este é um campo muito intenso e oposto à direção da magnetização. Na prática, o efeito deste campo impede que a magnetização do ímã permaneça uniforme até a borda. Do lado de fora, como $M = 0$,

$$H(\pm h/2) = \frac{B(h/2)}{\mu_0} = +2,48 \times 10^5 \text{ A/m.}$$

Quando cruzamos a borda do ímã, numa direção paralela à magnetização, o campo H sofre um salto. As setas rotuladas com $\mu_0 \mathbf{H}$ na Figura 2.8 ilustram a descontinuidade do campo H nas bases do ímã cilíndrico.