Instituto de Física

FAP 2292

Notas de Aula 4

Ondas Eletromagnéticas

Prof. Valdir Bindilatti
10 de junho de 2009

Notas revistas por:

Prof. Daniel Cornejo
Prof$^{\underline{a}}$. Márcia Fantini
Prof. Sérgio Morelhão

Baseadas nas notas do
Prof. Aluisio Neves Fagundes
para o 1$^{\underline{o}}$ semestre de 2005.
10 de junho de 2009

Sumário

5

Ondas Eletromagnéticas

A contribuição de Maxwell ao Eletromagnetismo registra também a previsão da existência de *ondas eletromagnéticas*. Esta previsão feita por Maxwell em 1860 foi demonstrada por Heinrich Hertz em 1887.

Inicialmente vamos ver como as equações de Maxwell conduzem a uma *equação de onda* para o campo eletromagnético. Depois vamos estudar uma classe particular de soluções desta equação, as *ondas planas*. Este tipo mais simples de solução permite determinar propriedades das ondas eletromagnéticas que resultam ser gerais, ou seja, que se aplicam a qualquer tipo de onda eletromagnética.

5.1 As equações de Maxwell no vácuo e as equações de onda

Vamos reescrever as equações de Maxwell, na sua forma diferencial, para o vácuo, ou seja, uma região do espaço completamente vazia onde não há cargas ($\rho = 0$) nem correntes elétricas ($\mathbf{J} = 0$):

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{5.4}$$

Tomemos o rotacional de ambos os membros da Lei de Faraday (5.3). Invertendo a ordem das derivadas espaciais e temporais, teremos:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right).$$

Podemos eliminar o campo magnético $\mathbf{B}$ desta equação através da Lei de Ampère-Maxwell (5.4), obtendo uma equação que envolve apenas o campo elétrico:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}\right) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

O duplo rotacional pode ser desenvolvido usando a relação para o duplo produto vetorial:

$$\mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right) = \mathbf{B}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\right) - \mathbf{C}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)$$

tomando o cuidado de manter o operador $\boldsymbol{\nabla}$ à esquerda de $\mathbf{E}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}) - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{E}.$$

Como no vácuo $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0$, pela Lei de Gauss (5.1), chegamos a

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{5.5a}$$

Uma equação idêntica é obtida para o campo magnético se tomarmos o rotacional da Lei de Ampère-Maxwell (5.4), eliminar $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}$ através da Lei de Faraday (5.3) e usarmos $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0$ da Lei de Gauss para o campo magnético, (5.2):

$$\nabla^2\mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}. \tag{5.5b}$$

No membro esquerdo das duas equações aparece o operador $\nabla^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ atuando sobre os campos vetoriais $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{B}$. Este operador é denominado *laplaciano vetorial*.[1] Ele tem uma forma muito simples em coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Note que as equações (5.5a) e (5.5b) são equações *vetoriais*. Elas podem ser transcritas como uma equação para cada componente do campo vetorial. Por exemplo, para o campo elétrico, teremos em coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned}
\nabla^2 E_x &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\\
\nabla^2 E_y &= \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\\
\nabla^2 E_z &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

onde cada componente de $\mathbf{E}$ é uma função da posição e do tempo, ou seja

$$E_x \equiv E_x(x,y,z,t), \quad E_y \equiv E_y(x,y,z,t), \quad E_z \equiv E_z(x,y,z,t).$$

Estas equações tem o formato de equações de onda. Tais equações admitem soluções na forma de ondas se propagando no espaço de três dimensões com velocidade $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. A forma particular das funções que descrevem tais ondas depende das fontes do campo elétrico e magnético, cargas e correntes, localizadas em alguma região do espaço. A seguir vamos examinar o tipo mais simples possível de solução, as ondas planas.

[1] Este operador atua sobre campos vetoriais. O seu nome vem da similaridade de sua expressão cartesiana com a do operador *laplaciano* que atua sobre campos escalares (funções escalares da posição). O laplaciano de um campo escalar $\phi(\mathbf{r})$ é definido como $\nabla^2\phi = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\phi)$. O laplaciano de um campo vetorial $\mathbf{F}$ é definido como $\nabla^2\mathbf{F} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{F}) - \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{F})$. Os dois operadores são completamente diferentes e as suas expressões somente são idênticas em coordenadas cartesianas.

5.2 Ondas planas

Ondas planas são funções que se propagam numa direção fixa do espaço. Estritamente falando uma onda eletromagnética plana só pode ser gerada por uma distribuição infinita de cargas ou correntes com simetria plana. Entretanto, quando consideramos uma pequena região do espaço bem distante das cargas e correntes, podemos tratar qualquer onda como plana. Por exemplo, a luz proveniente do sol se propaga radialmente a partir dele. Quando observada numa pequena região da terra, entretanto, a divergência angular de um feixe de luz solar é completamente desprezível. Podemos tratar a luz como se propagando numa direção fixa.

5.2.1 A equação de onda em 1 dimensão

Como uma onda plana se propaga numa direção fixa, podemos adotar esta direção como a direção do eixo z. A função que descreve esta onda plana só depende da coordenada z e do tempo t, sendo independente das coordenadas x e y. A forma geral para o campo eletromagnético de tal onda é

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(z,t) = E_x(z,t)\,\hat{x} + E_y(z,t)\,\hat{y} + E_z(z,t)\,\hat{z},\\
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(z,t) = B_x(z,t)\,\hat{x} + B_y(z,t)\,\hat{y} + B_z(z,t)\,\hat{z}.
\end{aligned}$$

Ou seja, num determinado instante, o campo elétrico (ou magnético) é o mesmo em qualquer ponto de um plano $z =$ constante. Na realidade estamos tratando de um problema em 1 dimensão. Para um campo eletromagnético deste tipo as equações de onda assumem a forma

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} & \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} & \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\\
\dfrac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} & \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} & \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}.
\end{array}$$

Aqui adotamos $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$. O parâmetro c tem dimensão de velocidade, e como veremos é a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo. Ele é uma constante universal denominada *velocidade da luz no vácuo*, porque a luz é uma onda eletromagnética.

As equações para as três componentes do campos elétrico e magnético são idênticas e tem uma forma que você já deve ter encontrado, por exemplo quando estudou as ondas se propagando numa corda tensionada. Neste caso a equação se aplica ao deslocamento lateral da corda. Tomando o comprimento da corda ao longo da direção $\hat{z}$ o deslocamento transversal de um ponto localizado em z, $f(z,t)$ por exemplo, obedece à equação:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \tag{5.6}$$

onde a velocidade com que as ondas se propagam na corda $v = \sqrt{T/\rho}$ é determinada pela tensão na corda, T e sua densidade linear de massa (massa por unidade de comprimento), ρ.

5.2.2 A função de onda plana

A solução da equação de onda em uma dimensão, (5.6), tem uma forma geral simples. A equação de onda é satisfeita por qualquer função em que as coordenadas espacial e temporal só se apresentem na combinação $z \pm vt$. Vamos verificar este resultado.

Definimos uma variável $u = az + bt$, com a e b constantes, e tomamos a função $f(z,t)$ na forma

$$f(z,t) = F(u) = F(az + bt),$$

onde $F(u)$ é uma função contínua e diferenciável de uma única variável. Para substituir na equação de onda, vamos calcular as derivadas parciais, levando em conta que $u = az + bt$ e que, portanto, $\partial u/\partial z = b$ e $\partial u/\partial t = a$. Derivando em relação a z obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z} = aF', \text{ e}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = a\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} = a\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}u^2}\frac{\partial u}{\partial z} = a^2 F'',$$

onde adotamos uma notação compacta para as derivadas de uma função de uma única variável $F(u)$:

$$F' \equiv \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}; \quad F'' \equiv \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}u^2}.$$

Derivando em relação a t termos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = bF', \text{ e}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = b\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} = b\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}u^2}\frac{\partial u}{\partial t} = b^2 F''.$$

Levando as segundas derivadas à equação de onda (5.6), obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = a^2 F''(u) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{b^2}{v^2}F''(u) \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = v^2 \Leftrightarrow \left|\frac{b}{a}\right| = v.$$

Note que a única condição necessária para que a função seja solução da equação de onda é que a razão entre os parâmetro a e b, em $u = az + bt$, tenha o mesmo módulo que v. A função $F(u)$ permanece completamente arbitrária. Há duas formas simples e equivalentes de escrever u:

- tomando $a = 1$, fazemos $u = z + bt$, e, como $b = \pm v$: $u = z + vt$ ou $u = z - vt$;
- tomando $b = 1$, fazemos $u = t + az$, e, como $a = \pm\frac{1}{v}$: $u = t + z/v$ ou $u = t - z/v$.

As opções com o sinal negativo, $F(u = z - vt)$ ou $F(u = t - z/v)$ representam uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo z com velocidade v, como ilustra a Figura 5.1. O deslocamento espacial da onda vem do fato de que qualquer valor fixo da variável $u = u_0$, associado ao valor fixo da função $F(u_0)$, equivale a um valor diferente da coordenada espacial em cada instante de tempo: $z = u_0 + vt$, ou $z = v(t - u_0)$. Com o sinal positivo, $F(u = z + vt)$ ou $F(u = t + z/v)$ representam uma onda que se propaga no sentido negativo do eixo z, porque, para $u = u_0$, $z = u_0 - vt$ ou $z = v(u_0 - t)$.

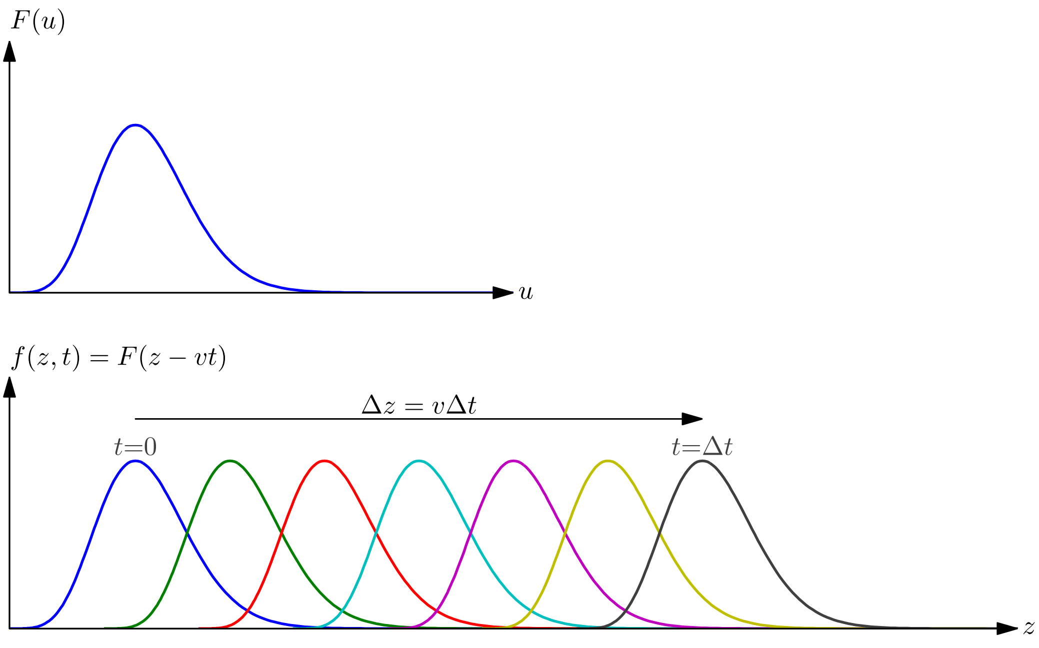

Figura 5.1: A propagação de uma onda. Encima: a função de uma única variável $F(u)$. Embaixo: a função $f(z,t) = F(z - vt)$ representada numa série crescente de instantes t separados pelo mesmo intervalo de tempo. Depois de um intervalo de tempo Δt a onda se deslocou no espaço por uma distância $\Delta z = v\Delta t$.

5.2.3 Propriedades das ondas eletromagnéticas

Voltemos agora às ondas eletromagnéticas planas, se propagando paralelamente ao eixo z com velocidade v. Para satisfazer as equações de onda (5.5a) e (5.5b) devemos ter

$$v = \pm c, \text{ com } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}.$$

Assim, as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo com velocidade $c \approx 3{,}0 \times 10^8$ m/s. A denominada *velocidade da luz no vácuo* é uma constante universal.[2]

Utilizando a forma da solução de ondas planas da seção anterior, podemos escrever para as componentes do campo elétrico e do campo magnético

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r},t) &= E_x(z - vt) \qquad & E_y(\mathbf{r},t) &= E_y(z - vt) \qquad & E_z(\mathbf{r},t) &= E_z(z - vt) \\ B_x(\mathbf{r},t) &= B_x(z - vt) \qquad & B_y(\mathbf{r},t) &= B_y(z - vt) \qquad & B_z(\mathbf{r},t) &= B_z(z - vt), \end{aligned}$$

onde E_x, E_y, E_z, B_x, B_y e B_z representam seis funções quaisquer de uma única variável para a qual escolhemos a forma $u = z - vt$, onde $v = \pm c$.

Lembre-se que no processo de obter as equações de onda tomamos o rotacional de uma das equações de Maxwell. Nesta operação, na prática uma derivação, informações contidas na equação original são perdidas. Embora as equações de onda sejam identicamente satisfeitas por quaisquer seis funções arbitrárias, o resultado tem que ser compatível com as equações originais. Neste processo de verificação, veremos que há relações que devem ser satisfeitas entre estas funções, que vão definir um formato particular para as ondas eletromagnéticas.

[2]No Sistema Internacional de Unidades (SI), desde 1983, ela é definida com o valor *exato* $c = 299.792.458$ m/s. A unidade de comprimento no SI, o metro, é definida a partir da combinação deste valor e da unidade de tempo (o segundo), definida independentemente.

Vejamos primeiro a Lei de Gauss (5.1) para o campo elétrico.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = E_z' = 0 \Rightarrow E_z(z - vt) = \text{constante.}$$

Aqui usamos a notação $F'(u) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}$ introduzida anteriormente, e o fato de que para a onda plana se propagando na direção z os campos são independentes de x e y. Assim, a Lei de Gauss requer que a componente do campo elétrico paralela à direção de propagação de uma onda plana, z no caso, não dependa nem da posição nem do tempo. Ou seja, só é admitida uma componente E_z do campo elétrico uniforme e estática. De forma completamente análoga, a Lei Gauss para o campo magnético (5.2) exige que B_z seja uniforme e estática. Como um campo constante e estático não caracteriza nenhuma propagação excluímos estes campos do que chamamos de onda eletromagnética fazendo $E_z = 0$ e $B_z = 0$. Assim, toda a ação *ondulatória* de uma onda eletromagnética só envolve as componentes de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ no plano perpendicular à direção de propagação. Isto caracteriza as ondas eletromagnéticas como *ondas transversais*. Embora tenhamos obtido o resultado considerando ondas planas, a transversalidade é uma propriedade característica de qualquer onda eletromagnética.

Vamos agora utilizar a Lei de Faraday (5.3), com apenas as componentes ondulatórias dos campos E_x, E_y e B_x, B_y. Lembrando que elas só dependem de z e t, temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial E_y}{\partial z}\,\hat{x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\,\hat{y} = -E_y'\,\hat{x} + E_x'\,\hat{y}, \text{ e} \\ -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}\,\hat{x} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\,\hat{y} = vB_x'\,\hat{x} + vB_y'\,\hat{y}. \end{aligned}$$

Igualando as componentes, teremos

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} vB_x' = & -E_y' \\ vB_y' = & E_x'. \end{cases}$$

A igualdade das derivadas implica que cada par de funções só podem diferir por uma constante. Aparece novamente, um campo uniforme e estático que não tem caráter ondulatório. Suprimindo esta parcela da onda eletromagnética, a Lei de Faraday implica:

$$vB_x = -E_y, \quad \text{e} \quad vB_y = E_x.$$

Ou seja, das seis funções iniciais, só restaram duas funções não especificadas, porque as Equações de Maxwell impõem uma dependência estreita entre os campos elétrico e magnético da onda eletromagnética. Para uma descrição geométrica desta relação, vamos escrevê-la usando o produto vetorial. Verifique que ela é equivalente a

$$v\mathbf{B} = \hat{z}\times\mathbf{E} \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = v\mathbf{B}\times\hat{z},$$

o que implica que os vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são perpendiculares entre si. Anteriormente mostramos que a onda eletromagnética é transversal, ou seja, os campos elétrico e magnético são ambos perpendiculares à direção de propagação. Como o módulo do produto vetorial de dois vetores ortogonais é o produto dos módulos, e, por definição $|\hat{z}| = 1$, temos sempre $|c\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|$.

Chamemos de $\hat{k}$ o versor que aponta na direção e sentido da propagação da onda. O parâmetro v tem módulo c mas pode assumir os valores $+c$, para uma onda se propagando no sentido positivo de z (com $\hat{k} = +\hat{z}$), ou $-c$, para uma onda se propagando no sentido oposto, (com $\hat{k} = -\hat{z}$). Utilizando o versor de propagação estas propriedades geométricas das ondas eletromagnéticas podem ser resumidas nas expressões seguintes:

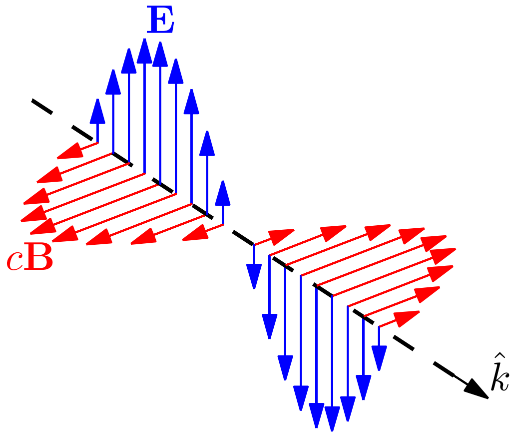

Figura 5.2: Os campos elétrico e magnético de uma onda eletromagnética plana se propagando no vácuo, representados num determinado instante de tempo em posições ao longo de uma reta paralela à direção de propagação $\hat{k}$. A figura ilustra a relação $c\mathbf{B} = \hat{k}\times\mathbf{E}$ que se aplica em cada ponto do espaço em qualquer instante.

$$\hat{k}\cdot\mathbf{E} = 0; \quad \hat{k}\cdot\mathbf{B} = 0; \tag{5.7}$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B}\times\hat{k}; \quad c\mathbf{B} = \hat{k}\times\mathbf{E}. \tag{5.8}$$

A figura 5.2 ilustra a relação entre os três vetores das ondas eletromagnéticas no vácuo. Embora tenham sido obtidas estudando ondas planas, estas propriedades são completamente gerais e se aplicam a qualquer tipo de onda eletromagnética se propagando no vácuo. Note que elas implicam numa estrutura muito simples para as ondas eletromagnéticas. Em qualquer ponto do espaço $\mathbf{r}$ em qualquer instante de tempo t, os três vetores estão *atados* entre si da maneira prescrita.

Se tivermos apenas uma onda plana se propagando numa certa direção, podemos escolher esta como a direção de um eixo coordenado, como fizemos até aqui. Mas se tivermos mais de uma onda plana se propagando em diferentes direções não podemos redefinir os eixos de coordenadas para descrever cada onda. A forma mais geral de uma onda plana se propagando numa direção qualquer $\hat{k}$, entretanto, é bastante simples. Basta notarmos que a coordenada z, que escolhemos na direção de propagação da onda até agora, nada mais é do que a componente do vetor posição $\mathbf{r} = (x,y,z)$ na direção da propagação, definida pelo versor $\hat{k} = \hat{z}$, ou seja $z = \mathbf{r}\cdot\hat{k}$. Assim, para uma onda plana se propagando numa direção qualquer descrita pelo versor $\hat{k}$, as expressões para os campos elétrico e magnético se escrevem simplesmente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\hat{k}.\mathbf{r} - ct) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(\hat{k}.\mathbf{r} - ct), \text{ ou}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(t - \hat{k}.\mathbf{r}/c) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(t - \hat{k}.\mathbf{r}/c).$$

5.3 Onda produzida por uma lâmina de corrente

Na seção anterior vimos a forma geral de uma onda plana eletromagnética. Note que, até agora, a forma da função que descreve o campo eletromagnético da onda se encontra completamente em aberto. Isto se deve ao fato de que desenvolvemos soluções que

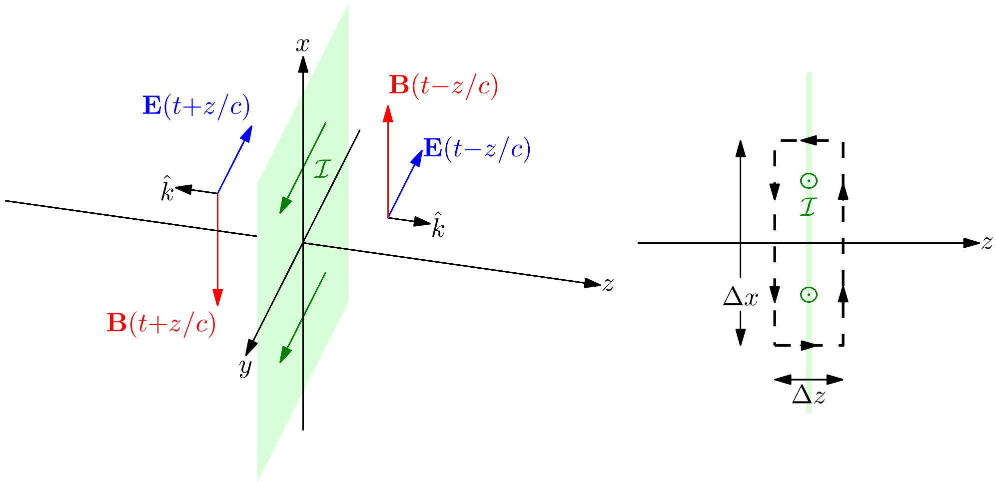

Figura 5.3: Um plano infinito pelo qual flui uma corrente distribuída uniformemente.

se aplicam ao campo eletromagnético no vácuo. O que estabelece a forma explícita da função que descreve a onda são as suas fontes, ou seja, as cargas e correntes que se encontram em algum outro lugar do espaço. Nesta seção vamos mostrar como esta função é obtida a partir da situação mais simples possível. Para termos ondas planas devemos ter simetria plana e por isso vamos considerar uma lâmina plana infinita de corrente que varia no tempo.

Nosso sistema é um plano, que tomamos como o plano $z = 0$, com carga total nula, mas composta da superposição de cargas positivas e negativas. Não há nenhuma corrente através do plano, de forma que inicialmente são nulos tanto o campo elétrico como o campo magnético em todo o espaço. A partir do instante $t = 0$, por algum artifício, fazemos uma corrente fluir uniformemente através do plano, numa direção que tomamos como a do eixo y. O sistema está esquematizado na figura 5.3. Como a corrente é infinita, vamos descrevê-la através de uma densidade $\mathcal{I}$ (corrente por unidade de largura), de tal forma que a corrente que flui na direção $\hat{y}$ ao longo de uma lâmina de largura $\mathrm{d}x$ é $\mathrm{d}I = \mathcal{I}\mathrm{d}x$. Como supomos a corrente distribuída uniformemente a densidade de corrente é função apenas do tempo $\mathcal{I}(t)$, não dependendo da posição sobre o plano.

Utilizando apenas a Lei de Ampère, sem a corrente de deslocamento de Maxwell, prevemos que esta distribuição plana e uniforme de corrente dá origem a um campo magnético que é uniforme de cada lado do plano, apontando na direção $+\hat{x}$ do lado direito da figura $(z > 0)$ e na direção $-\hat{x}$ do lado esquerdo $(z < 0)$. Entretanto, como o campo não existia antes de $t = 0$, o seu aparecimento resulta numa variação de fluxo magnético que dá origem a um campo elétrico que se opõe a ela segundo a Lei de Faraday. Mas isto significa uma variação de fluxo elétrico que contribui para o campo magnético através da corrente de deslocamento. Esta interdependência entre os campos magnético e elétrico está na origem das ondas eletromagnéticas. Embora pareça um processo complicado, já temos as ferramentas para prever exatamente o comportamento do campo eletromagnético nesta situação.

Em qualquer ponto fora do plano de corrente valem as Equações de Maxwell para o vácuo, cuja solução é na forma de uma onda eletromagnética. Pela simetria do sistema a onda se propaga para longe do plano, ou seja na direção $+\hat{z}$ do lado direito e na direção $-\hat{z}$ do lado esquerdo. Os campos elétrico e magnético em cada ponto e em cada instante têm as características determinadas para qualquer onda eletromagnética, como indicado na figura 5.3. A direção do campo magnético foi determinada pela Lei de Ampère.

Como indicado na figura, escolhemos escrever a dependência dos campos na forma $u = t - z/v$ (com $v = +c$ à direita do plano de corrente e $v = -c$ à sua esquerda). Levando em conta as relações que devem ser obedecidas para os campos de uma onda e explicitando as componentes tomamos:

$$\text{para } z > 0, \quad \begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = B_0(t - z/c)\,\hat{x} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -cB_0(t - z/c)\,\hat{y} \end{cases} \tag{5.9}$$

$$\text{e para } z < 0, \quad \begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -B_0(t + z/c)\,\hat{x} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -cB_0(t + z/c)\,\hat{y} \end{cases}, \tag{5.10}$$

onde a função $B_0(u)$, que por simetria deve ser a mesma para os dois lados do plano, ainda está indeterminada. Para determiná-la vamos aplicar a Lei de Ampère-Maxwell na sua forma integral

$$\oint \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0\, I + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A},$$

ao circuito esquematizado do lado direito da figura 5.3, que corta o plano de corrente. Para a circuitação do campo magnético temos

$$\oint \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = [B_0(t - (\Delta z/2)/c) + B_0(t + (-\Delta z/2)/c)]\,\Delta x = 2B_0(t - (\Delta z/2)/c)\Delta x.$$

Do lado direito da Equação de Ampère-Maxwell temos a corrente que atravessa o circuito,

$$I = \mathcal{I}(t)\Delta x,$$

e a derivada temporal do fluxo do campo elétrico, que ainda não conhecemos.

Para resolver o problema fazemos o circuito se fechar no plano, fazendo a sua largura $\Delta z \to 0$. Como a área do circuito $\Delta x \Delta z$ vai a zero, o fluxo do campo elétrico e sua derivada também se anulam. Assim, temos:

$$B_0(t) = \tfrac{1}{2}\mu_0\mathcal{I}(t),$$

o que determina a função que faltava.

Substituindo esta função nas expressões (5.9) e (5.10), temos finalmente

$$\text{para } z > 0, \quad \begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \tfrac{1}{2}\mu_0\mathcal{I}(t - z/c)\,\hat{x} \\ \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{1}{2}c\mu_0\mathcal{I}(t - z/c)\,\hat{y} \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\text{e para } z < 0, \quad \begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{1}{2}\mu_0\mathcal{I}(t + z/c)\,\hat{x} \\ \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{1}{2}c\mu_0\mathcal{I}(t + z/c)\,\hat{y} \end{cases} \tag{5.12}$$

O que isto significa é que, num ponto qualquer do espaço num instante t, o campo magnético é determinado, não pela corrente que flui no instante t, mas pela corrente que fluía no plano num *instante anterior* $t' = t - |z|/c$. Ou seja, a *informação* de que pelo plano flui uma determinada corrente se propaga no espaço com a velocidade da luz, c.

Vamos ver o que acontece num caso específico. A densidade de corrente no plano é nula até o instante $t = 0$, em que passa a ter um valor constante $\mathcal{I}_0$. Num instante posterior

t_0 a corrente é desligada e volta a ser nula. A função que descreve esta densidade de corrente em função do tempo é

$$\mathcal{I}(t) = \begin{cases} 0, \text{ para } \ t < 0, \\ \mathcal{I}_0, \text{ para } \ 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, \text{ para } \ t > 0. \end{cases}$$

Basta substituir esta função nas expressões (5.11) e (5.12) para obtemos os campos em função da posição e do tempo. Nestas expressões o argumento da função $\mathcal{I}$ é um instante de tempo anterior que pode ser expresso como $t' = t - |z|/c$.

Vamos primeiro considerar um instante de tempo em que a corrente está ligada, ou seja um instante t tal que $0 \leq t \leq t_0$. Há duas situações dependentes de z.

- Para pontos no espaço tais que $|z| > ct$, temos $t' < 0$ e $\mathcal{I}(t') = 0$:
  em toda esta região o campo eletromagnético ainda é nulo.
- para pontos no espaço tais que $|z| < ct$, $t' > 0$ e $\mathcal{I}(t') = \mathcal{I}_0$:
  e o campo eletromagnético já se estabeleceu.

O resultado está indicado no topo da figura 5.4. Toda a região entre $z = -ct$ e $z = +ct$ contém campos elétricos e magnéticos uniformes nas direções indicadas cujos módulos são, $B = \mu_0 \mathcal{I}_0/2$ e $E = c\mu_0 \mathcal{I}_0/2$. Para além da distância ct do plano, o campo eletromagnético permanece nulo. As fronteiras que limitam a região de campo não nulo avançam com velocidade c.

Consideremos agora um instante posterior ao desligamento da corrente $t > t_0$. Há três situações a considerar:

- Para pontos no espaço tais que $|z| > ct$, $t' < 0$ e $\mathcal{I}(t') = 0$:
  em toda esta região o campo eletromagnético ainda continua nulo. Nesta região ainda não se sabe que a corrente foi ligada em $t = 0$.
- Para pontos no espaço tais que $ct_0 < |z| < ct$, $t_0 > t' > 0$ e $\mathcal{I}(t') = \mathcal{I}_0$:
  nesta região já se sabe que a corrente foi ligada em $t = 0$, mas como $t' < t_0$, a informação de que ela foi desligada ainda não chegou. O campo eletromagnético ainda persiste.
- Na região mais próxima do plano, $|z| < ct_0$ temos $t' > t_0$ e $\mathcal{I}(t') = 0$:
  a informação do desligamento da corrente já chegou a esta região e o campo eletromagnético voltou a se anular.

Esta situação está indicada na parte de baixo da figura 5.4. Agora só existe campo eletromagnético em duas faixas de largura ct_0, uma em cada lado do plano. Em todo o resto do espaço o campo eletromagnético é nulo. As duas fronteiras das faixas de campo se afastam do plano com a velocidade da luz c.

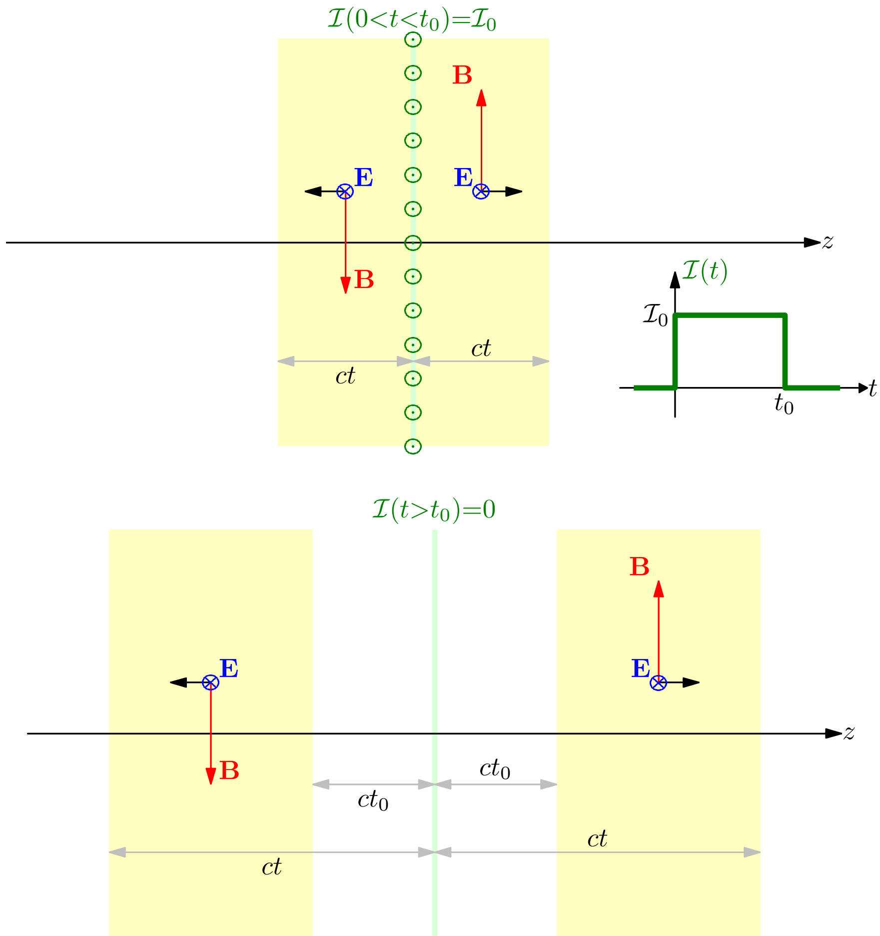

Figura 5.4: O campo eletromagnético de um plano infinito pelo qual flui uma corrente distribuída uniformemente, representado em dois instantes de tempo: acima num instante em que a densidade de corrente é $\mathcal{I}_0$, $0 \leq t \leq t_0$; abaixo num instante posterior ao desligamento da corrente, $t > t_0$;

5.4 Ondas senoidais, ou monocromáticas

A soluções expressas pelas equações (5.11) e (5.12) valem qualquer que seja a forma da função $\mathcal{I}(t)$. Tudo o que temos que fazer é tomar, para cada ponto do espaço, a corrente no instante anterior $t' = t - |z|/c$. Se tivéssemos uma corrente oscilando senoidalmente com uma freqüência angular ω, por exemplo,

$$\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 \cos(\omega t - \phi_0),$$

teríamos

$$\mathcal{I}(t') = \mathcal{I}_0 \cos(\omega t' - \phi_0) = \mathcal{I}_0 \cos(\omega|z|/c - \omega t + \phi_0).$$

Assim os campos elétrico e magnético num ponto do espaço exibiriam o mesmo caráter oscilatório da corrente fonte. Este tipo de onda é muito importante porque as ondas eletromagnéticas são produzidas, geralmente, por cargas ou correntes oscilantes. Vamos, então, rever algumas propriedades deste tipo de onda.

Vamos escrever a forma geral de uma onda plana senoidal se propagando numa direção arbitrária do espaço definida pelo versor de propagação $\hat{k}$. Com $\mathcal{I}(t')$ dado acima e substituindo $|z|$ pela forma mais geral $\hat{k} \cdot \mathbf{r}$ temos, para os campos elétrico e magnético de uma onda plana a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}\hat{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_0\right) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}\hat{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_0\right), \end{aligned}$$

onde os vetores constantes $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ e $\hat{k}$, como para qualquer onda eletromagnética, são ortogonais dois a dois e obedecem à relação $\mathbf{E}_0 = c\mathbf{B}_0 \times \hat{k}$. A grandeza ω/c tem dimensão de inverso de comprimento. A partir dela podemos definir uma grandeza vetorial denominada *vetor de onda* como

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\hat{k}.$$

Com esta definição as funções de onda são escritas de maneira mais compacta,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cos\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_0\right) \tag{5.13}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 \cos\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_0\right), \tag{5.14}$$

com a condição

$$\omega = kc. \tag{5.15a}$$

Esta equação entre o módulo do vetor de onda, $k = |\mathbf{k}|$, e a freqüência angular ω é denominada *relação de dispersão*. Esta é a forma que ela assume para ondas eletromagnéticas se propagando no vácuo.

Existem duas periodicidades associadas a ondas senoidais.

- O período temporal, dado por

  $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f},$$

  é o mínimo intervalo de tempo em que se repetem os valores dos campos *num mesmo ponto do espaço*. O inverso deste período, $f = \omega/2\pi$ é a *freqüência* da onda.

- Para um instante fixo de tempo, a onda é periódica também espacialmente. Os valores dos campos se repetem quando se caminha na direção de propagação, dada por $\mathbf{k}$. O período espacial é denominado *comprimento de onda* e é dado por

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Note que k desempenha para o espaço o mesmo papel que ω desempenha para o tempo. Como o espaço é tri-dimensional, entretanto, o vetor de onda $\mathbf{k}$ também informa sobre a direção e sentido de propagação da onda. Em termos da freqüência e do comprimento de onda a relação de dispersão se expressa na forma

$$\lambda f = c. \tag{5.15b}$$

O denominado *espectro eletromagnético* (ver, por exemplo a seção 24.7 do livro texto) nada mais é do que uma atribuição de nomes a diferentes faixas de freqüência (ou comprimento de onda). Esta classificação leva em conta, de um lado, que a resposta da matéria sob a ação dos campos elétrico e magnético de uma onda dependem da sua freqüência de oscilação. Outro aspecto envolvido é que diferentes tipos de fontes geram ondas eletromagnéticas com diferentes faixas de freqüência.

Uma região especial do espectro é a faixa do visível, em que ocorre o que chamamos de *luz*. Ela contém as freqüências na faixa aproximada de 4×10^{14} Hz até 8×10^{14} Hz, que correspondem a comprimentos de onda na faixa $0{,}4\ \mu\mathrm{m} < \lambda < 0{,}8\ \mu\mathrm{m}$. Não existe nada especial neste tipo de radiação eletromagnética, a não ser o fato de que o olho humano é capaz de detectá-la, donde o termo *visível*. As diferentes freqüências da luz nesta faixa são traduzidas pelo nosso cérebro como cores diferentes. Os extremos são o vermelho, de freqüência mais baixa e, portanto, com o maior comprimentos de onda, e o violeta, de freqüência mais alta e menor comprimento de onda. Assim, uma radiação com uma única freqüência se traduz numa cor única. Daí a denominação de *monocromática* (do grego *chroma*=cor) para uma onda senoidal pura. Esta denominação, embora derivada da luz visível, pode ser utilizada qualquer que seja a faixa do espectro, visível ou não.[3]

[3]Note que neste parágrafo utilizamos diversos termos para significar a mesma coisa: onda eletromagnética, luz, radiação eletromagnética. Você vai encontrar termos como *luz visível* (soa redundante), *luz ultravioleta*, *luz infravermelha* (parece contracenso, porque são invisíveis). Em todos os casos a palavra *luz* pode ser substituída por *radiação*, ou *onda*.

5.5 Energia e momento linear das ondas eletromagnéticas

Todo campo eletromagnético está associado a uma energia. Como sabemos, esta energia pode ser representada como armazenada nos próprios campos elétrico e magnético, distribuída continuamente no espaço com densidade volumétrica dada por

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2. \tag{5.16}$$

Como uma onda eletromagnética se constitui de um campo eletromagnético se propagando no espaço, ela transporta, também energia. Como, no vácuo, $E = cB$ e $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ temos que

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = u_B.$$

Ou seja, as densidades de energia elétrica e magnética são idênticas numa onda eletromagnética.

5.5.1 O vetor de Poynting

O movimento da energia associada ao campo eletromagnético pode ser representado de maneira detalhada através de uma *densidade de corrente de energia* (análoga à densidade de corrente elétrica). O vetor que a representa é denominado *vetor de Poynting* e é definido como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}. \tag{5.17}$$

A sua definição se aplica a qualquer campo eletromagnético, mas o seu significado é mais facilmente compreendido para as ondas eletromagnéticas. Vamos computar $\mathbf{S}$ para uma onda eletromagnética. Segue das propriedades dessas ondas que o produto vetorial $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ aponta na direção de propagação $\hat{k}$. Como os dois vetores são perpendiculares o modulo do produto é simplesmente o produto dos módulos, e temos

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}EB\hat{k}.$$

Como $E = cB$ podemos reescrever o módulo de $\mathbf{S}$ nas formas

$$S = \frac{c}{\mu_0}B^2 = \frac{1}{\mu_0 c}E^2 = \epsilon_0 c E^2 = \frac{E^2}{Z_0}.$$

A constante

$$Z_0 = \mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376{,}730313461\ldots\ \Omega,$$

é denominada *impedância característica do vácuo*.

Como para uma onda eletromagnética no vácuo, $u_E = u_B$, o seu vetor de Poynting também pode ser escrito na forma

$$\mathbf{S} = \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \mathbf{c} = u\mathbf{c},$$

onde definimos o vetor velocidade $\mathbf{c} = c\hat{k}$. Ou seja, o vetor de Poynting para uma onda eletromagnética é a densidade de energia multiplicada pela velocidade de propagação. Note a similaridade entre a forma de $\mathbf{S}$ e a da densidade de corrente elétrica associada a uma densidade de carga ρ se movendo com velocidade $\mathbf{v}$, $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. Assim, o vetor de Poynting representa a energia que atravessa uma área unitária, perpendicular à direção de propagação, por unidade de tempo. Ou seja, o fluxo de potência por unidade de área na direção de propagação.

Num determinado ponto do espaço o vetor de Poynting varia no tempo quando os campos dependem do tempo. Para ondas senoidais a dependência temporal de S num determinado ponto tem a forma $S(t) = S_0 \cos^2(\omega t + \phi)$. Define-se a *intensidade* de uma onda como a *média temporal* do fluxo de potência por unidade de área. A intensidade, portanto, é uma função apenas da posição. Como a média do quadrado do cosseno (ou do seno) num número inteiro qualquer de períodos é $\frac{1}{2}$, a intensidade de uma onda eletromagnética se expressa como

$$I = \langle S \rangle_t = \tfrac{1}{2} S_0 = \tfrac{1}{2} u_0 c = \tfrac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \tfrac{1}{2} \frac{1}{Z_0} E_0^2 = \tfrac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} B_0^2, \tag{5.18}$$

onde os índices "$_0$" são utilizados para representar as amplitudes das funções oscilatórias senoidais. A unidade SI para a intensidade é *watt por metro quadrado* $(\mathrm{W/m^2})$.

Até agora estudamos ondas planas, para as quais as amplitudes dos campos E_0 e B_0 são constantes, independentes da posição. Podemos ver como fica a dependência espacial dos campos de uma onda emitida por uma fonte localizada utilizando a propagação da energia. Suponha uma fonte pequena, como uma lâmpada por exemplo, que irradia ondas em todas as direções. Seja P_0 a potência média emitida pela fonte. A intensidade a uma distância r da fonte será

$$I(r) = \frac{P_0}{4\pi r^2}$$

porque a potência se distribui uniformemente pela área de uma esfera centrada na fonte. Através das expressões (5.18), obtemos

$$E_0^2(r) = \frac{2I}{\epsilon_0 c} \Rightarrow E_0(r) = cB_0(r) = \sqrt{\frac{2P_0}{4\pi\epsilon_0 c}} \times \frac{1}{r}.$$

O resultado mostra que os campos elétrico e magnético de uma onda decaem com o inverso da distância à fonte. Esta atenuação é muito mais lenta que a atenuação dos campos estáticos, que vão com o inverso do quadrado da distância.

5.5.2 Momento linear e pressão de radiação

Finalmente vamos mostrar que uma onda eletromagnética transporta, não apenas energia, mas também quantidade de movimento, ou *momento linear*. Vamos considerar a interação de uma onda eletromagnética com uma partícula de carga q. Num determinado instante, a partícula se encontra na posição $\mathbf{r}$ se movendo com velocidade $\mathbf{v}$. Na região há uma onda eletromagnética se propagando na direção $\hat{k}$. A força sobre a partícula devida aos campos da onda eletromagnética no ponto $\mathbf{r}$ é a força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Substituindo o campo magnético por

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \mathbf{E},$$

e desenvolvendo o duplo produto vetorial que aparece, obtemos

$$\mathbf{F} = \left(1 - \hat{k} \cdot \mathbf{v}/c\right) q\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left(q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\right)\hat{k}.$$

A primeira parcela é uma força na direção do campo elétrico. Para uma onda oscilatória a média no tempo desta força vai ser nula. A segunda parcela representa uma força na direção de propagação da onda. Note que $q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = P$, é a potência transmitida à partícula pela onda eletromagnética, ou seja a taxa com que a onda transfere energia à partícula. Se integramos a força durante um intervalo de tempo, obtemos o momento linear transmitido à partícula no mesmo intervalo. Em módulo:

$$\Delta p = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{P(t)}{c} \mathrm{d}t = \frac{\Delta U}{c}.$$

Este resultado mostra que toda energia transmitida por uma onda eletromagnética a uma partícula é necessariamente acompanhada de um momento linear na direção de propagação da onda cujo módulo é a energia transmitida dividida pela velocidade da luz.

Considere o processo de absorção completa de uma porção de radiação por um corpo inicialmente em repouso. Antes da absorção temos a onda se propagando e o corpo em repouso. Depois, a radiação desapareceu, mas o corpo adquiriu energia e momento linear. Vemos que para preservar as leis de conservação da energia e do momento linear, basta atribuir à porção de onda eletromagnética que contém uma energia U também um vetor momento linear de módulo $p = U/c$ que aponta na direção de propagação.

Como a força exercida pela radiação sobre um corpo é distribuída espacialmente, é mais conveniente tratá-la em termos da *pressão de radiação*, que nada mais é do que a média temporal da força por unidade de área. Como energia e momento são proporcionais para as ondas eletromagnéticas, temos a mesma relação de proporcionalidade entre a intensidade e a pressão de radiação. Assim, durante o processo de absorção total da radiação, a pressão média sobre o absorvedor é dada por

$$P = \frac{I}{c} \text{ (absorção)}.$$

Um corpo pode também refletir uma onda eletromagnética. Neste caso, embora possa não haver nenhuma absorção de energia, a direção do momento linear da onda muda de direção. A variação (vetorial) de momento é transferida para o refletor. Por exemplo, no caso de uma reflexão completa e frontal por um refletor imóvel, em que a direção de propagação da onda é simplesmente invertida, a pressão de radiação é duplicada.

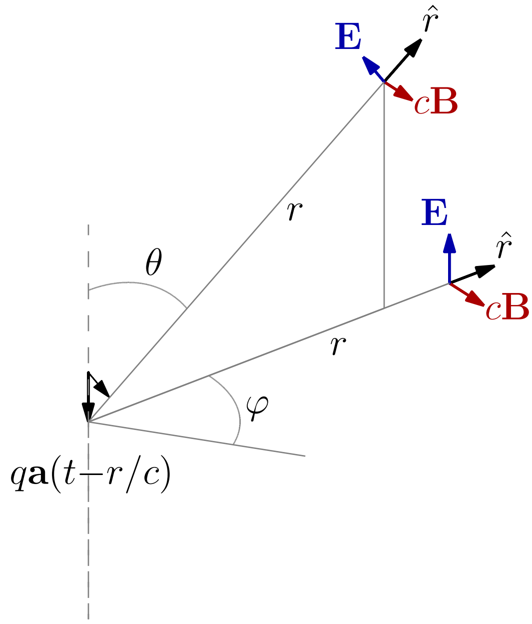

Figura 5.5: Campo de radiação de uma carga acelerada.

5.6 Radiação de uma carga acelerada

Nesta seção vamos apresentar as propriedades de ondas eletromagnéticas emitidas por uma fonte de dimensões limitadas. Os cálculos necessários para obter o campo eletromagnético neste caso estão além do escopo do nosso curso. Assim, vamos apresentar os resultados sem demonstrá-los, e explorar as suas características básicas.

Uma carga acelerada é o protótipo de uma fonte de ondas eletromagnéticas. Consideremos uma carga q nas vizinhanças da origem de um sistema de coordenadas que desenvolve um movimento oscilatório com pequena amplitude (a amplitude deve ser muito menor que o comprimento de onda da radiação emitida). A onda eletromagnética emitida por tal carga, quando observada a distâncias suficientemente grandes, depende apenas na sua aceleração que representamos por $\mathbf{a}(t)$. Os campos elétrico e magnético gerados pela carga acelerada, na chamada *zona de radiação*, têm a forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\mathbf{a}_\perp(t-r/c)}{r}, \tag{5.19a}$$

$$c\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\hat{r}\times\mathbf{a}_\perp(t-r/c)}{r}. \tag{5.19b}$$

A figura 5.5 ilustra estas expressões em dois pontos diferentes do espaço, à mesma distância r da carga.

Vamos reescrever estas expressões utilizando as coordenadas esféricas indicadas na figura e assumindo um movimento harmônico com freqüência angular ω numa direção fixa ($\hat{z}$) , de forma que:

$$z(t) = z_0\cos(\omega t), \quad v(t) = -\omega z_0\,\mathrm{sen}(\omega t), \quad \text{e} \quad a(t) = -\omega^2 z_0\cos(\omega t). \tag{5.20}$$

Assim, com $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ($z_0 \ll \lambda$) e $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$, obtemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\omega^2 q z_0\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\cos(\omega t - kr)\,\hat{\theta}, \tag{5.21a}$$

$$c\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\omega^2 q z_0\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\cos(\omega t - kr)\,\hat{\varphi}. \tag{5.21b}$$

Note que as amplitudes dos campos elétrico e magnético são proporcionais ao produto da carga pela amplitude do seu movimento oscilatório, qz_0. Se adicionarmos uma carga $-q$ fixa na origem, que não contribui para o campo de radiação, teremos um dipolo elétrico oscilante cujo momento de dipolo é $p(t) = qz(t) = p_0 \cos(\omega t)$. Podemos substituir o produto qz_0 por p_0 nas expressões dos campos e é fácil verificar que o resultado vale qualquer que seja o movimento das cargas q e $-q$ que resultam na oscilação do momento de dipolo elétrico. Por este motivo se usa a denominação *radiação de dipolo* para esta onda eletromagnética.

Vamos analisar estas expressões em detalhe.

- Note que a onda eletromagnética de propaga radialmente a partir da posição da carga, o que a caracteriza como uma *onda esférica* que se propaga na direção de $\hat{r}$.
- Num ponto $\mathbf{r}$ no instante t os campos são determinados não pela aceleração da carga no instante t, mas pela aceleração num instante anterior: $t' = t - r/c$. Isto dá a estes campos a característica de uma onda que se propaga no espaço.
- As amplitudes dos campos variam com o inverso da distância à carga $(1/r)$. Esta dependência foi antecipada no final da seção 5.5 por considerações de energia.
  Note que os campos estáticos decaem, no mínimo, com inverso do quadrado da distância $(1/r^2)$. Estes campos são dominantes na região próxima à carga, mas como decaem rapidamente com a distância, se tornam desprezíveis na zona de radiação. É este decaimento mais lento do campo de radiação com a distância que nos permite observar a luz emitida por estrelas muito distantes.
- Os campos são determinados apenas pela componente da aceleração perpendicular ao vetor $\mathbf{r}$, $a_\perp = a \operatorname{sen}\theta$. Assim, o campo de radiação é nulo na linha definida pela direção da aceleração, na qual $a_\perp = 0$. À medida que nos afastamos desta direção os campos crescem com $\operatorname{sen}\theta$, atingindo o máximo quando $\theta = \pi/2$, ou seja no plano perpendicular à direção da aceleração passando pela origem.
- As amplitudes dos campos são independentes de φ, ou seja, a radiação é simétrica por rotação em torno do eixo definido pela aceleração da carga.
- Observe na figura 5.5 que o campo elétrico é paralelo ao plano definido pelo eixo da aceleração e o vetor que vai da carga ao ponto de observação. O campo magnético é perpendicular a este plano. Os vetores $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ e $\hat{k} = \hat{r}$ em cada ponto do espaço satisfazem às condições (5.7) e (5.8) como qualquer onda eletromagnética.
- A direção do vetor campo elétrico de uma onda eletromagnética no ponto de observação define a sua *polarização*. No caso da radiação da carga que oscila ao longo de uma direção fixa, o campo elétrico num determinado ponto está sempre sobre a mesma linha. Ondas deste tipo são *linearmente polarizadas*.

5.6.1 Intensidade da radiação de dipolo

A distribuição angular da intensidade (potência média irradiada por unidade de área) está ilustrada na figura 5.6. A expressão correspondente é

$$I(r,\theta) = \langle S(r,\theta) \rangle_t = \frac{\mu_0}{8\pi^2 c} \omega^4 (qz_0)^2 \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{r^2}. \tag{5.22}$$

A potência média total irradiada em todas as direções pode ser obtida integrando a intensidade sobre uma superfície esférica de raio r centrada na origem. O resultado é:

$$P = \frac{\mu_0}{12\pi c} \omega^4 (qz_0)^2.$$

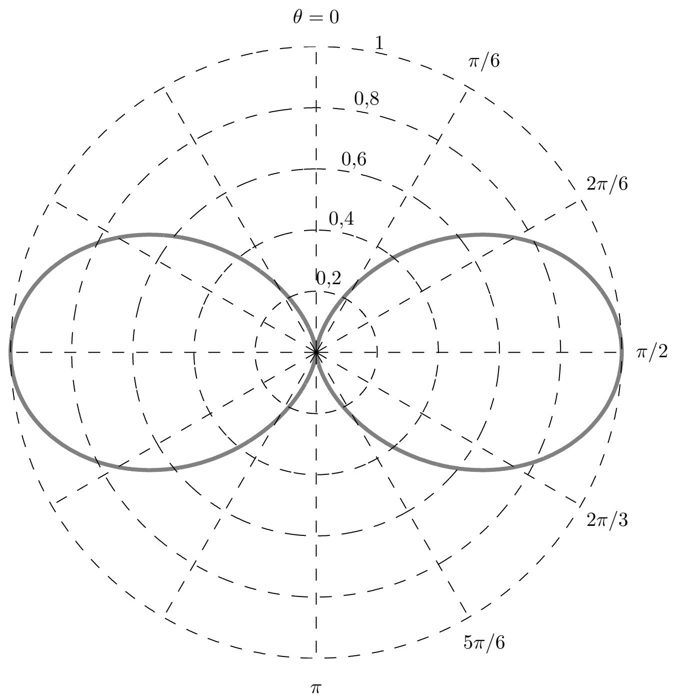

Figura 5.6: Distribuição angular da intensidade irradiada por uma carga acelerada que se move na direção z. Este é um gráfico polar: a intensidade da onda emitida numa dada direção é proporcional à distância entre a origem e o ponto da curva nesta direção. Esta curva pode ser girada em torno do eixo z.

Assim, uma potência extra deve ser fornecida pelo agente que provoca a oscilação da carga.

Para melhor quantificar este efeito, vamos considerar uma antena reta. Assim não temos uma única carga, mas um número grande de cargas elétricas oscilando o que pode ser descrito como uma corrente oscilante. Se a antena tem comprimento $\ell \ll \lambda$, podemos considerar a corrente uniforme ao longo do seu comprimento e tomar para a amplitude da corrente $I_0 = q\omega z_0/\ell$. Com isto, a potência média irradiada pela antena fica:

$$P_{\text{rad}} = \frac{\pi}{3}\mu_0 c \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 I_0^2. \tag{5.23}$$

A potência irradiada é proporcional ao quadrado da amplitude da corrente, como a potência dissipada num resistor. Assim, para a fonte de alimentação a antena apresenta uma resistência adicional devida à radiação. Por analogia com $P = \frac{1}{2}RI_0^2$, a potência média dissipada numa resistência R atravessada por uma corrente senoidal de amplitude I_0, obtemos:

$$R_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3}\mu_0 c \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \approx 789 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \Omega. \tag{5.24}$$

Lembre-se que $\mu_0 c = Z_0 \approx 377\Omega$ é a impedância característica do vácuo. Este resultado somente é valido no limite em que o comprimento da antena é muito menor que o comprimento de onda da radiação emitida, de forma de $\ell/\lambda \ll 1$. Antenas deste tipo são muito pouco efetivas. As antenas utilizadas na prática (rádio, TV, etc.) têm seu comprimento comparável ao λ da onda emitida. Para tais antenas os resultados anteriores têm que ser modificados para levar em conta a distribuição da corrente e as diferenças de fase entre as ondas emitidas ao longo do comprimento da antena. Uma antena muito utilizada é a *antena de meia onda*, em que $\ell = \lambda/2$. Para esta antena a impedância vale $R_{\text{rad}} = 73\Omega$.

Apêndice A

Representação complexa de ondas senoidais

Uma maneira muito conveniente de representar uma onda senoidal (ou qualquer função senoidal) é tomá-la como *a parte real de uma função complexa*. Isto pode ser feito sempre no caso de funções oscilatórias que obedecem equações diferenciais lineares, porque as operações lineares preservam a separação entre as partes real e imaginária de uma função complexa. Adicionar uma parte imaginária a uma função real, entretanto, tem o efeito de simplificar a álgebra, como veremos.

A figura A.1 mostra as várias maneiras de representar um número complexo. Para nossos propósitos, a melhor representação é a exponencial complexa:

$$z = \rho \mathrm{e}^{i\phi},$$

onde $\rho = |z|$ é o *módulo* do número complexo e ϕ é o seu argumento ou *fase*.

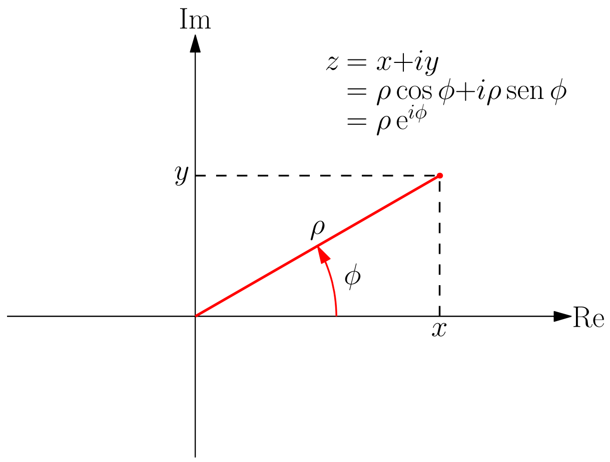

Figura A.1: As várias formas de representar um número complexo z.

Utilizando esta notação, podemos reescrever as funções dadas em (5.13) e (5.14) como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right], \tag{A.1a}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{B}_0 \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right]. \tag{A.1b}$$

A fase inicial, ϕ_0, foi incorporada nas amplitudes vetoriais $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$ que agora são também complexas. Para economizar notação, muitas vezes omitimos a indicação Re (parte real de) que fica implícita.

Note que as funções complexas que representam as ondas senoidais planas têm uma amplitude constante e toda a dependência espacial e temporal fica na fase da exponencial, na forma de uma função linear da posição e do tempo,

$$\phi(\mathbf{r},t) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t.$$

Um operador diferencial atuando sobre uma função complexa deste tipo vai envolver apenas as derivadas da exponencial complexa, que são simplesmente

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{e}^{i\phi} = -i\omega \mathrm{e}^{i\phi},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{i\phi} = ik_x \mathrm{e}^{i\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{e}^{i\phi} = ik_y \mathrm{e}^{i\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{e}^{i\phi} = ik_y \mathrm{e}^{i\phi}.$$

Ou seja, derivar uma tal função em relação ao tempo se resume a multiplicá-la por $-i\omega$, e em relação a uma coordenada se resume a multiplicá-la for ik_j, onde k_j é a componente do vetor de onda **k** na direção correspondente. Estes resultados podem ser representados através das associações:

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nabla} \equiv i\mathbf{k}.$$

Para as derivadas de funções do tipo representado pelas equações (A.1a) ou (A.1b), as operações divergente e rotacional de um campo vetorial senoidal **F** se traduzem em

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = i\mathbf{k}\cdot\mathbf{F} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = i\mathbf{k}\times\mathbf{F}.$$

Vamos reescrever as Equações de Maxwell no vácuo para este tipo de onda. As leis de Gauss (5.1) e (5.2) ficam

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{A.2a}$$

de onde segue que tanto **E** quanto **B** são perpendiculares à direção de propagação, que é a mesma do vetor de onda **k**, como em (5.7). As leis de Faraday (5.3) e Ampère-Maxwell (5.4) ficam (suprimindo o fator comum i que aparece nos dois membros das equações):

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \omega\mathbf{B}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{B} = -\frac{\omega}{c^2}\mathbf{E}, \tag{A.2b}$$

que mostram que **E** e **B** são perpendiculares entre si, como em (5.8).

Tomemos o produto vetorial por **k** dos dois membros da lei de Faraday:

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}) = \omega\mathbf{k}\times\mathbf{B}.$$

Lembrando a identidade $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, o primeiro membro fica

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) = -k^2\mathbf{E}.$$

Tomando $\mathbf{k} \times \mathbf{B}$ no segundo membro como dado pela lei de de Ampère-Maxwell (A.2b), obtemos

$$k^2\mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E},$$

o que implica na relação de dispersão

$$\omega = kc,$$

como havíamos obtido anteriormente (5.15a). Levado a qualquer das equações (A.2b), este resultado conduz a

$$|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|,$$

a relação entre os módulos dos campos elétrico e magnético de qualquer onda eletromagnética.