



Instituto de Física



FAP 2293

Notas de Aula 5

Ondas em meios materiais: reflexão e refração

Prof. Valdir Bindilatti
1º semestre de 2009
(10 de junho de 2009)

Notas revistas por:

Prof. Daniel Cornejo

Prof. Sérgio Morelhão

Baseadas nas notas do

Prof. Aluisio Neves Fagundes
para o 2º semestre de 2004.

Sumário

6 Ondas em meios materiais: reflexão e refração	3
6.1 Equações de Maxwell em meios materiais	3
6.1.1 Ondas em isolantes: índice de refração	4
6.2 Reflexão e Refração	6
6.2.1 Leis da reflexão e refração	6
6.2.2 Coeficientes de reflexão e transmissão	8
A Leitura opcional	13
A.1 Reflexão total	13
A.2 Ondas em condutores: absorção	15
A.3 Outra visão das ondas nos materiais	18
A.4 Polarização	20
A.4.1 Polarizadores	20
A.4.2 Polarização por reflexão	21
A.5 Modelo mecânico para a condutividade elétrica	22

6

Ondas em meios materiais: reflexão e refração

Nestas notas vamos estudar as ondas eletromagnéticas se propagando em meios materiais e os fenômenos da reflexão e refração que ocorrem quando uma onda atravessa a superfície de separação de dois meios diferentes.

6.1 Equações de Maxwell em meios materiais

Nas Notas de Aula 3 vimos como descrever os campos elétrico e magnético no interior da matéria incorporando os efeitos da polarização elétrica \mathbf{P} e da magnetização \mathbf{M} . Isto foi através de *cargas e correntes polarização* e de *correntes de magnetização*. Na Tabela 6.1, reescrevemos as quatro equações de Maxwell na presença da matéria e as *relações constitutivas* que definem os campos \mathbf{D} e \mathbf{H} .

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.1)$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_\ell \quad (6.3)$
$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (6.2)$	$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_\ell \quad (6.4)$
$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (6.5)$	$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (6.6)$

Tabela 6.1: Equações de Maxwell em meios materiais.

Na Tabela 6.2 resumimos as condições que devem ser satisfeitas pelas componentes dos campos na interface de separação entre dois meios. Tais relações, que são consequências das equações de Maxwell, foram deduzidas no capítulo 4 das Notas de Aula 3.

Condições de Contorno

$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}$	$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$B_{1n} = B_{2n}$	$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \vec{\mathcal{I}} \times \hat{n}$
	$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_\ell$		$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \vec{\mathcal{I}}_\ell \times \hat{n}$

Tabela 6.2: Condições de contorno para campos elétricos e magnéticos dos dois lados da superfície de separação entre os meios 1 e 2. O sentido do versor normal \hat{n} é do meio 1 para o meio 2.

6.1.1 Ondas em isolantes: índice de refração

Vamos agora deduzir a equação de onda para um meio isolante de forma que não há nem cargas livres nem correntes livres, ou seja, $\rho_\ell = 0$ e $\mathbf{J}_\ell = \mathbf{0}$. O meio vai ser caracterizado por uma permissividade elétrica, ϵ , e uma permeabilidade magnética μ , de forma que

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H}. \quad (6.8)$$

Estas relações têm a mesma forma que as utilizadas no caso estático, mas há uma diferença importante. As respostas do meio dependem da frequência de oscilação dos campos elétrico e magnético de forma que a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética são funções da frequência angular, $\epsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$. Vamos, portanto, considerar ondas planas e monocromáticas, com uma frequência bem definida.

Para obter as propriedades das ondas eletromagnéticas fazemos exatamente o que foi feito na seção 4.4.1 das Notas de Aula 4. Quando substituímos as formas (6.7) para \mathbf{D} e (6.8) para \mathbf{H} , as equações de Maxwell resultam idênticas às equações para o vácuo, com ϵ em lugar de ϵ_0 e μ em lugar de μ_0 . Ou seja, as propriedades das ondas eletromagnéticas num meio isolante são idênticas às propriedades das ondas eletromagnéticas no vácuo, com a diferença que a velocidade da luz, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, é substituída por $v = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$. Ou seja, a velocidade (de fase) da luz num meio isolante é diferente da velocidade da luz no vácuo. Além disso ela depende da frequência (cor) da luz. A razão entre a velocidade da luz no vácuo, c , e a velocidade da luz no meio, v , é denominada *índice de refração* do meio. Temos, então

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\kappa_m \kappa}.$$

Normalmente $v < c$, de forma que o índice de refração é $n > 1$. Para o vácuo, por definição, $n = 1$.

Lembramos que, em geral, o índice de refração depende da frequência, $n \equiv n(\omega)$. Na Tabela 25.1 livro texto há uma lista de índices de refração de alguns materiais para a luz visível. Para gases que são materiais pouco densos em condições normais n é muito próximo da unidade. Por exemplo, para o ar a 1 atm e 0°C , a tabela dá $n = 1,000293$. No caso da água no estado líquido $n = 1,333$ e no estado sólido $n = 1,309$. A constante dielétrica estática da água é $\kappa_0 = 80$, o que daria um índice de refração no limite de baixas frequências $n_0 = 8.9$. Esta diferença ilustra a dependência do índice de refração com a frequência. Para a maioria dos materiais transparentes a variação do índice de refração na faixa da luz visível é muito pequena. Mas é esta pequena variação que é responsável

pelo fenômeno da separação da luz em diversas cores por um prisma.

A seguir resumimos as propriedades de uma onda plana monocromática num meio isolante. Escrevemos os campos utilizando a notação complexa. Lembre-se que os campos são as partes reais das funções complexas representadas.

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (6.9)$	$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (6.12)$
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (6.10)$	$v \mathbf{B}_0 = \hat{k} \times \mathbf{E}_0 \quad \mathbf{E}_0 = v \mathbf{B}_0 \times \hat{k} \quad (6.13)$
$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\mu \epsilon} = \frac{c^2}{n^2} \quad (6.11)$	$n = \sqrt{\kappa \kappa_m} \quad (6.14)$

Note que as ondas eletromagnéticas num meio material continuam sendo ondas transversais, com os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} perpendiculares entre si e perpendiculares à direção de propagação, \hat{k} . Entre os módulos dos campos, em qualquer ponto e instante, vale a relação $|\mathbf{E}| = v|\mathbf{B}|$, com $v = c/n$.

Quando as oscilações dos campos elétrico e magnético estão em fase (Na seção A.1 discutimos o caso geral) e as densidades de energia elétrica e magnética, como no vácuo, são idênticas também num meio isolante:

$$u_E = \frac{\epsilon}{2} E^2 = u_B = \frac{1}{2\mu} B^2. \quad (6.15)$$

A densidade de corrente de energia, dada pelo vetor de Poynting, fica

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon E^2 \mathbf{v} = \frac{1}{\mu} B^2 \mathbf{v}, \quad (6.16)$$

e a intensidade (média temporal do fluxo de energia) de uma onda senoidal pode ser escrita como

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle_t = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 v = \frac{1}{2\mu} B_0^2 v. \quad (6.17)$$

Substituindo $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ na (6.16), ela pode ser reescrita como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \hat{k} = \frac{E^2}{Z} \hat{k}. \quad (6.18)$$

A raiz quadrada da razão entre a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica

$$Z = \sqrt{\mu/\epsilon} \quad (6.19)$$

têm dimensão de resistência elétrica e é denominada *impedância característica* do meio. Para o vácuo ele assume o valor exato $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = \mu_0 c = 376,730313461... \Omega$.

6.2 Reflexão e Refração

Vamos considerar uma onda plana e monocromática incidindo sobre a superfície de separação entre dois meios isolantes 1 e 2. A onda incidente provém de cargas distantes, que oscilam na frequência ω , e se propaga proveniente do meio 1. Os campos elétrico e magnético em cada meio podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)} & \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_t e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{B}_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)} & \mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_t e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \omega \mathbf{B}_i &= \mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i & \omega \mathbf{B}_r &= \mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_r & \omega \mathbf{B}_t &= \mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_t \\ k_i &= k_r = n_1 \frac{\omega}{c} & & & k_t &= n_2 \frac{\omega}{c}. \end{aligned}$$

Utilizamos o índice i para denotar a onda *incidente*, o índice r para a onda *refletida* e o índice t para a onda *transmitida* ou *refratada*. Note que os campos da onda refletida e transmitida oscilam com a *mesma frequência* ω da onda incidente.

6.2.1 Leis da reflexão e refração

Vamos mostrar que as conhecidas leis da reflexão e refração são consequência das condições de contorno do campo eletromagnético (Tabela 6.2). Por exemplo, a componente do campo magnético perpendicular ao plano da interface B_n deve ser contínua. Seja \mathbf{r}_0 um ponto qualquer da interface. A condição de continuidade se aplica a qualquer ponto \mathbf{r}_0 em qualquer instante de tempo. Assim:

$$\begin{aligned} B_{n1}(\mathbf{r}_0, t) = B_{n2}(\mathbf{r}_0, t) &\Rightarrow B_{ni} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t)} + B_{nr} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t)} = B_{nt} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t)} \\ &\Rightarrow B_{ni} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_0} + B_{nr} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_0} = B_{nt} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_0}. \end{aligned}$$

Na última passagem eliminamos o fator $e^{-i\omega t}$, comum às três ondas.

Seja \mathbf{t} um deslocamento paralelo à interface. Como $\mathbf{r}_0 + \mathbf{t}$ é um ponto da interface, a mesma condição de continuidade se aplica a este ponto:

$$B_{ni} e^{i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{t})} + B_{nr} e^{i\mathbf{k}_r \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{t})} = B_{nt} e^{i\mathbf{k}_t \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{t})} = (B_{ni} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_0} + B_{nr} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_0}) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{t}}$$

onde a última igualdade vem da condição de continuidade no ponto \mathbf{r}_0 . Reagrupando os termos obtemos

$$B_{ni} e^{i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{t})} (1 - e^{i(\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{t}}) + B_{nr} e^{i\mathbf{k}_r \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{t})} (1 - e^{i(\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{t}}) = 0.$$

Para que esta condição seja satisfeita para qualquer deslocamento \mathbf{t} cada uma das parcelas deve ser identicamente nula, o que requer $e^{i(\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{t}} = e^{i(\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{t}} = 1$, ou seja:

$$(\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (6.20)$$

Note que equações idênticas seriam obtidas se utilizássemos a condição de continuidade na componente do campo elétrico tangente à superfície de separação. O conteúdo destas condições é simples. Veja que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{t}$ é a diferença de fase da oscilação entre dois pontos separados por \mathbf{t} num mesmo instante. Para satisfazer a condição de continuidade, esta diferença de fase tem que ser a mesma para as três ondas envolvidas. Mas para três vetores \mathbf{k} diferentes e qualquer vetor do plano \mathbf{t} , a única solução é que ela seja nula.

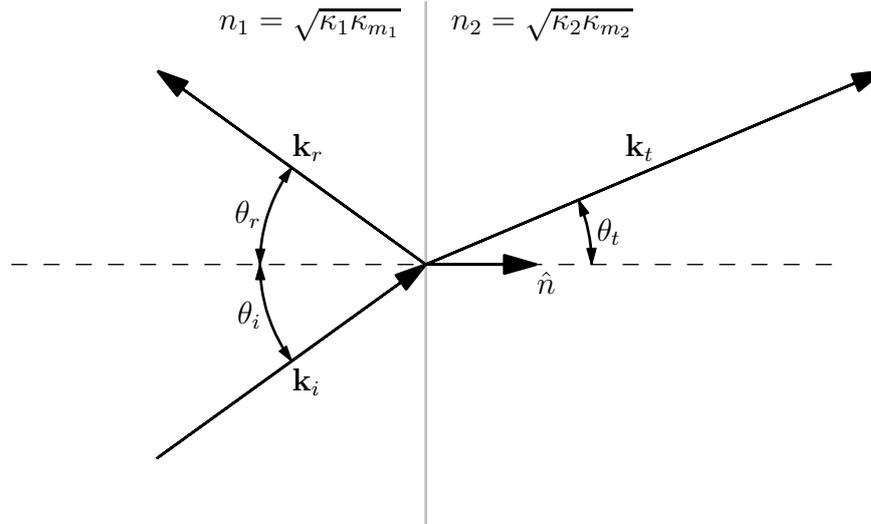


Figura 6.1: Definição dos parâmetros da reflexão-refração no plano de incidência. Os vetores de onda estão desenhados de acordo com a leis da reflexão e de Snell, para o caso $n_2 > n_1$.

Geometricamente as condições (6.20) significam que os vetores diferença $(\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_i)$ e $(\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_r)$ são ambos perpendiculares à interface, ou, equivalentemente, paralelos à sua normal \hat{n} :

$$(\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_i) \parallel \hat{n} \quad \text{e} \quad (\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_r) \parallel \hat{n}. \quad (6.21)$$

Isto resulta que os quatro vetores, \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r , \mathbf{k}_t e \hat{n} , se encontram todos sobre um único plano, denominado *plano de incidência*. Este resultado é a primeira parte da Lei de Snell. Ela significa uma grande simplificação na geometria do problema, que está definida na Figura 6.1. Observe que nesta figura os três vetores de onda estão de acordo com a condição (6.20): as suas componentes tangenciais ao plano de incidência são idênticas. Os ângulos de incidência, θ_i , de reflexão, θ_r , e de refração, θ_t , são definidos como ângulos entre os vetores de onda correspondentes e a normal à interface entre os dois meios. Escrevendo as condições em (6.20) em termos destes ângulos obtemos:

$$k_t \sin \theta_t = k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r,$$

que com $k_i = k_r = n_1 \omega / c$ e $k_t = n_2 \omega / c$ resulta na conhecida forma da **Lei de Snell**:

$$\boxed{n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i}, \quad (6.22)$$

e na **Lei da Reflexão**:

$$\boxed{\theta_r = \theta_i}. \quad (6.23)$$

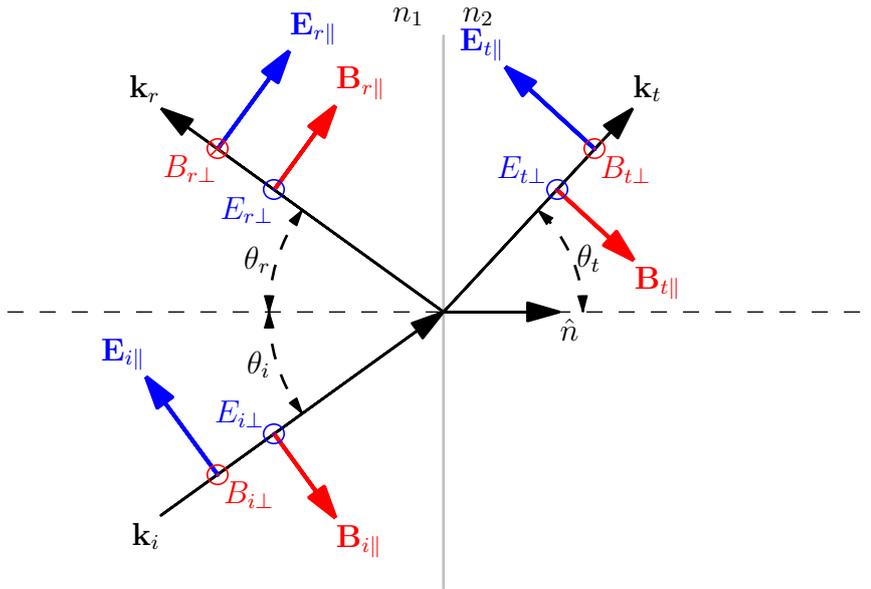


Figura 6.2: Definição das componentes dos campos eletromagnéticos em relação ao plano de incidência. Os vetores de onda estão desenhados de acordo com a leis da reflexão e de Snell, para o caso $n_2 < n_1$.

6.2.2 Coeficientes de reflexão e transmissão

Continuando a exploração das condições de continuidade, vamos obter as relações entre os campos das ondas refletida e transmitida e da onda incidente. Como as ondas são transversais, os seus campos são ortogonais aos respectivos vetores de onda \mathbf{k} , que por sua vez são paralelos ao plano de incidência. Vamos descrever os campos através de duas componentes: a componente *paralela ao plano de incidência*, denotada pelo subscrito \parallel e a componente *perpendicular ao plano de incidência*, denotada pelo subscrito \perp . O esquema está mostrado na Figura 6.2. Note que definimos o sinal das componentes do campo elétrico de acordo com a onda incidente. O sinal das componentes do campo magnético é compatível com a relação entre o campo elétrico e a direção de propagação.

Vamos manter a notação com subscrito t para a componente tangencial, ou seja *paralela à interface entre os dois meios*, e com subscrito n para a componente normal, ou seja *perpendicular à interface entre os dois meios*.

Como tratamos de meios isolantes, não há correntes ou cargas livres na interface. Com os resultados obtidos na seção anterior, as condições de continuidade na interface podem ser escritas em termos apenas das amplitudes dos campos. Elas conduzem às equações seguintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} &\Rightarrow \begin{cases} E_{i\parallel} \cos \theta_i + E_{r\parallel} \cos \theta_r &= E_{t\parallel} \cos \theta_t \\ E_{i\perp} + E_{r\perp} &= E_{t\perp} \end{cases} \\ D_{n1} = D_{n2} &\Rightarrow \kappa_1 E_{i\parallel} \sin \theta_i - \kappa_1 E_{r\parallel} \sin \theta_r = \kappa_2 E_{t\parallel} \sin \theta_t \\ \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\kappa_{m1}} B_{i\perp} - \frac{1}{\kappa_{m1}} B_{r\perp} &= \frac{1}{\kappa_{m2}} B_{t\perp} \\ \frac{1}{\kappa_{m1}} B_{i\parallel} \cos \theta_i - \frac{1}{\kappa_{m1}} B_{r\parallel} \cos \theta_r &= \frac{1}{\kappa_{m2}} B_{t\parallel} \cos \theta_t \end{cases} \\ B_{n1} = B_{n2} &\Rightarrow B_{i\parallel} \sin \theta_i + B_{r\parallel} \sin \theta_r = B_{t\parallel} \sin \theta_t \end{aligned}$$

onde, para cada uma das três ondas, se aplicam as condições

$$v\mathbf{B} = \hat{k} \times \mathbf{E} \Rightarrow \begin{cases} cB_{\parallel} = nE_{\perp} \\ cB_{\perp} = nE_{\parallel} \end{cases}$$

Há três equações envolvendo E_{\parallel} : a primeira, a terceira e a quarta (através de B_{\perp}). Com o auxílio das Leis de Snell e da Reflexão elas podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} E_{t\parallel} - E_{r\parallel} &= E_{i\parallel} \\ \frac{n_1 \kappa_2}{n_2 \kappa_1} E_{t\parallel} + E_{r\parallel} &= E_{i\parallel} \\ \frac{n_2 \kappa_{m1}}{n_1 \kappa_{m2}} E_{t\parallel} + E_{r\parallel} &= E_{i\parallel} \end{aligned}$$

As duas últimas equações são idênticas, porque

$$\frac{n_1 \kappa_2}{n_2 \kappa_1} = \frac{n_2 \kappa_{m1}}{n_1 \kappa_{m2}} = \sqrt{\frac{\kappa_2 \kappa_{m1}}{\kappa_{m2} \kappa_1}} = \frac{Z_1}{Z_2},$$

onde utilizamos a definição (6.18) das impedâncias características dos meios. Esta redundância vem do fato que as Leis de Snell, que foram obtidas das condições de continuidade, já estão incorporadas nestas equações.

Resolvendo para $E_{t\parallel}$ e $E_{r\parallel}$ em função de $E_{i\parallel}$, obtemos os coeficientes de transmissão e reflexão para esta componente do campo elétrico:

$$\begin{aligned} t_{\parallel} &= \frac{E_{t\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{2}{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{Z_1}{Z_2}} \\ r_{\parallel} &= \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} - \frac{Z_1}{Z_2}}{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{Z_1}{Z_2}} \end{aligned}$$

Note que a componente paralela do campo elétrico das ondas transmitida e incidente têm sempre o mesmo sinal. Para a onda refletida, o sinal pode ser o mesmo ou o oposto do sinal da onda incidente, dependendo das condições de incidência e das propriedades dos dois meios.

As três equações envolvendo E_{\perp} , provenientes das condições para E_{\perp} e B_{\parallel} , podem ser escritas como

$$\begin{aligned} E_{t\perp} - E_{r\perp} &= E_{i\perp} \\ \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \frac{Z_1}{Z_2} E_{t\perp} + E_{r\perp} &= E_{i\perp} \\ E_{t\perp} - E_{r\perp} &= E_{i\perp} \end{aligned}$$

De novo, há uma redundância. Resolvendo, obtemos os coeficientes para a componente perpendicular do campo elétrico:

$$\begin{aligned} t_{\perp} &= \frac{E_{t\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{2}{1 + \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \frac{Z_1}{Z_2}} \\ r_{\perp} &= \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{1 - \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \frac{Z_1}{Z_2}}{1 + \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \frac{Z_1}{Z_2}} \end{aligned}$$

Perceba que estes coeficientes, para a componente perpendicular do campo elétrico, são diferentes dos anteriores para a componente paralela ao plano de incidência.

A reflexão e transmissão são também caracterizadas pelas razões entre os fluxos de energia na interface. Para cada onda o fluxo de energia é dado pelo produto escalar do vetor de Poynting pela normal à superfície, $|\mathbf{S} \cdot \hat{n}|$. Como os coeficientes de transmissão e reflexão são diferentes para as componentes paralela e perpendicular ao plano de incidência, definem-se coeficientes para os fluxos de energia correspondentes. Lembrando que

$$S = \epsilon E^2 v = \frac{1}{Z} E^2,$$

definimos

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\parallel} + \mathbf{S}_{\perp},$$

onde os dois vetores são paralelos à direção de propagação e dados por

$$\mathbf{S}_{\parallel} = \frac{1}{Z} E_{\parallel}^2 \hat{k}, \quad \mathbf{S}_{\perp} = \frac{1}{Z} E_{\perp}^2 \hat{k}.$$

Os índices *transmitância* T e *refletância* R são definidos como as razões entre os fluxos de energia transmitido e refletido, respectivamente, e o fluxo de energia incidente. Para cada uma das componentes (paralela ou perpendicular ao plano de incidência), obtemos:

$$T = \frac{\langle S_t \rangle_t \cos \theta_t}{\langle S_i \rangle_t \cos \theta_i} = \frac{Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i} |t|^2$$

$$R = \frac{\langle S_r \rangle_t \cos \theta_r}{\langle S_i \rangle_t \cos \theta_i} = |r|^2.$$

A notação $\langle S \rangle_t$ significa a média temporal do vetor de Poynting. É fácil verificar que para cada uma das componentes, paralela ou perpendicular, vale $T + R = 1$. Assim, o fluxo líquido de energia na interface é sempre nulo, como era de se esperar.

Em materiais que não são fortemente magnéticos, a permeabilidade magnética é muito pouco diferente da permeabilidade do vácuo, μ_0 e podemos tomar $\kappa_{m1} \cong \kappa_{m2} \cong 1$. Assim, nos materiais não magnéticos transparentes o índice de refração é determinado basicamente pela sua constante dielétrica, $n = \sqrt{\kappa}$. Com isso a razão entre as impedâncias características se torna o inverso da razão entre os índices de refração, $Z_1/Z_2 = n_2/n_1$, e as expressões anteriores para os índices de transmissão e reflexão se reduzem a

$$t_{\parallel} = \frac{2}{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{n_2}{n_1}}, \quad r_{\parallel} = \frac{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} - \frac{n_2}{n_1}}{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{n_2}{n_1}}, \quad (6.24)$$

$$t_{\perp} = \frac{2}{1 + \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \frac{n_2}{n_1}}, \quad r_{\perp} = \frac{1 - \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \frac{n_2}{n_1}}{1 + \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \frac{n_2}{n_1}}. \quad (6.25)$$

As expressões para a transmitância e refletância ficam

$$T = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} |t|^2, \quad R = |r|^2. \quad (6.26)$$

Estes resultados estão ilustrados nas Figuras 6.3 e 6.4, respectivamente, para os casos $n_2 > n_1$ e $n_2 < n_1$.

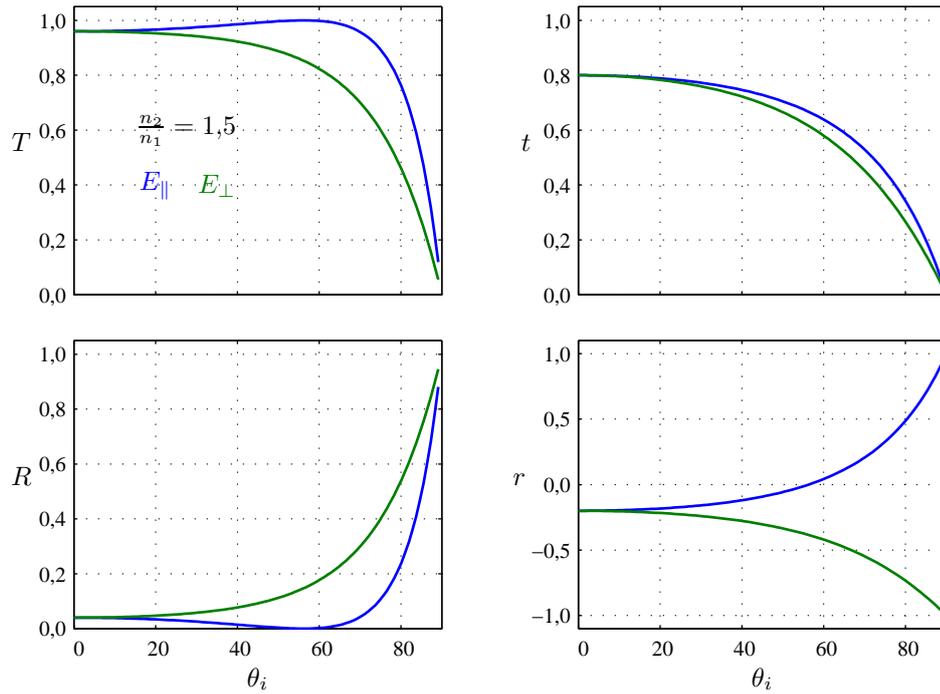


Figura 6.3: Transmitância T , refletância R e os coeficientes de transmissão t e reflexão r para o caso $n_2 > n_1$.

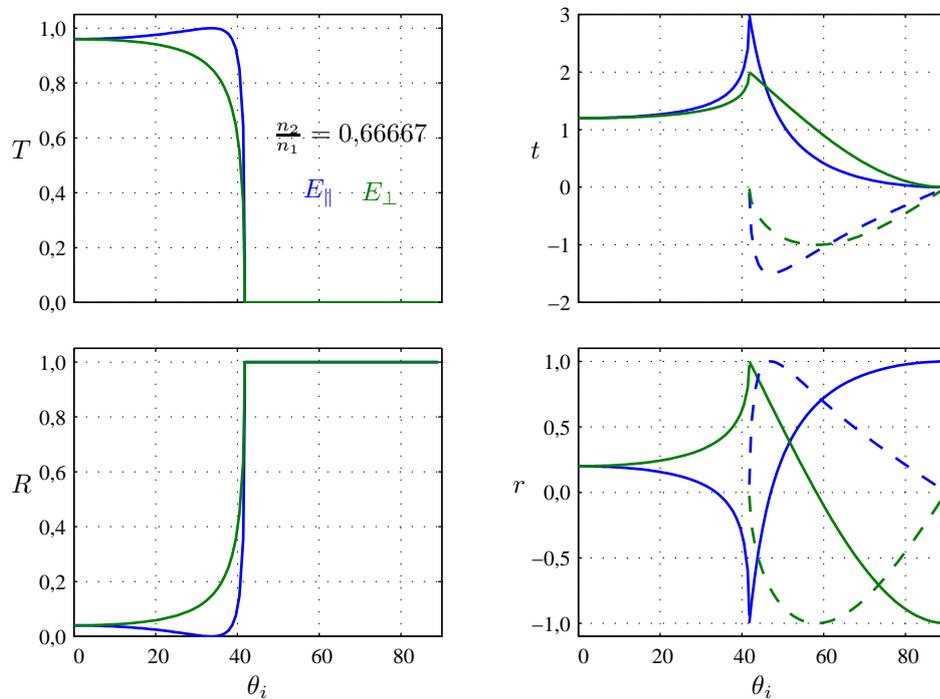


Figura 6.4: Transmitância T , refletância R e os coeficientes de transmissão t e reflexão r para o caso $n_2 < n_1$. Acima do ângulo crítico, onde ocorre reflexão total, os coeficientes t e r são complexos. Nesta região dos gráficos, as linhas contínuas indicam suas partes reais e as linhas tracejadas indicam suas partes imaginárias

Um caso particularmente simples é o da incidência normal, quando $\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$. Neste caso o plano de incidência é qualquer plano que contenha a normal. Os coeficientes, tanto para a componente paralela quanto para a componente perpendicular, se reduzem a

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}.$$

Assim, se $n_1 < n_2$, ou seja, se a onda incide de um meio de baixo índice de refração (como o ar) num meio com alto índice de refração (como o vidro), o campo elétrico da onda refletida na interface é invertido em relação ao campo elétrico da onda incidente. No caso contrário, onda incidindo do vidro para o ar, não há inversão do campo elétrico na reflexão. Para a transmitância e refletância neste caso, obtemos

$$T = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}, \quad R = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Apêndice A

Leitura opcional

A.1 Reflexão total

No caso em que $n_2 < n_1$, como no caso da luz passando do vidro para o ar, a lei de Snell determina um ângulo de incidência crítico, acima do qual o seno do ângulo de refração seria maior que 1:

$$\text{sen } \theta_c = \frac{n_2}{n_1}.$$

Para incidência com ângulo acima deste limite ocorre o fenômeno da *reflexão total*. Na Figura 6.4 vemos que a transmitância se anula e a refletância é total. Para obter tal resultado, simplesmente aplicamos as fórmulas (6.24) e (6.25) com $\text{sen } \theta_t$ obtido da Lei de Snell:

$$\text{sen } \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \text{sen } \theta_i.$$

Para $\text{sen } \theta_i > \text{sen } \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ resulta $\text{sen } \theta_t > 1$, o que não tem significado geométrico. Entretanto, a Lei de Snell na forma da equação (6.22) decorre da condição (6.20) sobre as componentes dos vetores de onda tangenciais ao plano de incidência. Esta condição determina que a componente tangencial de \mathbf{k}_t deve ser idêntica à componente tangencial de \mathbf{k}_i :

$$(k_t)_t = (k_i)_t = \frac{\omega n_1 \text{sen } \theta_i}{c}.$$

Lembre-se que a relação de dispersão (6.11) que resulta da equação de onda é uma relação entre os quadrados de \mathbf{k} e ω . Para o meio 2 temos:

$$\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{k}_t = (k_t)_t^2 + (k_t)_n^2 = n_2^2 \omega^2 / c^2.$$

Assim, quando $\theta_i > \theta_c$ e, portanto, $(k_t)_t = (k_i)_t > n_2 \omega / c$

$$(k_t)_n^2 = \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - (k_t)_t^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \text{sen}^2 \theta_i) < 0!$$

Ou seja, a componente de \mathbf{k}_t normal à superfície de separação entre os meios é imaginária! Não há nenhum problema nisso dentro do formalismo complexo de descrição dos campos.

Para entender o significado de um vetor de onda complexo, vamos chamar de \hat{z} direção normal à superfície de separação entre os meios (no sentido do meio 1 para o meio 2), e de \hat{y} a direção da intersecção entre o plano de incidência e a superfície.

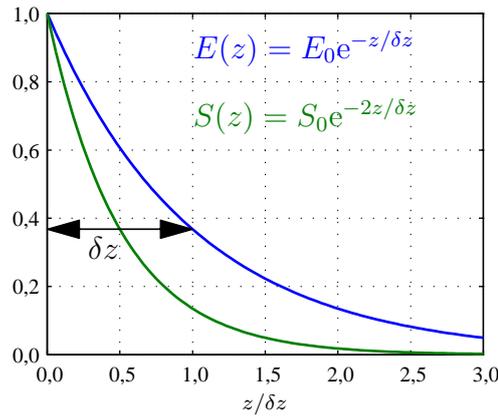


Figura A.1: Comportamento da amplitude e do quadrado da amplitude de uma onda evanescente com a distância.

Reescrevemos este vetor de onda complexo como

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t &= ik_I \hat{z} + k_R \hat{y}, \quad \text{com} \\ k_R &= (k_t)_t = \frac{n_1 \omega}{c} \text{sen } \theta_i, \quad \text{e} \\ k_I &= |(k_t)_n| = \frac{n_2 \omega}{c} \sqrt{\left(\frac{n_1 \text{sen } \theta_i}{n_2}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

Substituímos esta forma de \mathbf{k}_t na expressão para o campo elétrico no meio 2:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_t e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

Para o expoente de e resulta

$$i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = i(ik_I z + k_R y - \omega t) = -k_I z + i(k_R y - \omega t).$$

Ou seja, a componente imaginária do vetor de onda resulta numa parcela real e negativa no expoente. A expressão para o campo elétrico assume a forma

$$\mathbf{E}_2 = (\mathbf{E}_t e^{-k_I z}) e^{i(k_R y - \omega t)}.$$

Vemos que existe um campo eletromagnético oscilante no meio 2, mesmo na situação de reflexão total, mas este campo não tem mais a forma de uma onda plana. Ele é uma onda que se propaga na direção paralela à interface mas cuja amplitude depende da distância à interface. A amplitude da onda, $|\mathbf{E}_t e^{-k_I z}|$, decai exponencialmente com a distância a medida que se entra no meio 2. Este tipo de onda se denomina *onda evanescente*.

A Figura A.1 ilustra o comportamento da exponencial decrescente. A amplitude dos campos é atenuada por um fator $1/e \cong 0.3679$ para cada intervalo $\delta z = \frac{1}{k_I}$. Como $k_t = n_2 \omega / c = 2\pi / \lambda_2$, onde λ_2 é o comprimento de onda no meio 2,

$$\delta z = \frac{1}{k_I} = \frac{\lambda_2}{2\pi \sqrt{\left(\frac{n_1 \text{sen } \theta_i}{n_2}\right)^2 - 1}}.$$

Assim, o campo eletromagnético só penetra no meio 2 numa faixa cuja largura é da mesma ordem de grandeza que o comprimento de onda λ_2 . A densidade de energia ou o

vetor de Poynting, que envolvem o produto de duas funções do tipo $e^{-k_I z}$, são atenuadas duas vezes mais rápido. A atenuação a cada intervalo δz é por um fator $1/e^2 = 0,1353$, como ilustrado na Figura A.1.

Na Figura 6.4 vemos que as expressões para os coeficientes r e t resultam em números complexos na faixa de incidência com reflexão total, $\theta_i > \theta_c$. O efeito disto no comportamento dos campos que tem a forma $E = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ é simplesmente uma alteração na fase da oscilação. A amplitude da onda refletida, por exemplo, é $E_r = r E_i$. Quando r é real a diferença de fase entre as duas ondas só pode ser 0, para r positivo, ou π , para r negativo. Quando r é complexo, ele pode ser escrito como $r = |r| e^{i\phi}$, e a diferença de fase é o argumento de r , ϕ .

A amplitude do campo magnético da onda no meio 2 é dada por $\mathbf{B}_t = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_t$. Como a componente z de \mathbf{k}_t é imaginária ($k_{tz} = ik_I = k_I e^{i\pi/2}$), há uma diferença de fase de 90° entre as oscilações do campo elétrico e magnético paralelas ao plano de incidência.

As equações (6.15) para a densidade de energia, (6.16) para o vetor de Poynting e (6.17) para a intensidade, por envolverem os produtos dos campos, não são mais válidas nesta situação. O formalismo complexo é baseado no fato de que as partes reais e imaginárias de funções complexas não se misturam quando são somadas ou derivadas. Mas no caso do produto de dois números complexos há uma mistura das duas partes de forma que a parte real do produto não é o produto das partes reais. Para obter u , S ou I temos que fazer o produto dos campos reais. Seja ϕ a diferença de fase entre as oscilações do campo elétrico e do campo magnético num determinado ponto do espaço, de forma que

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t), \quad \text{e} \quad B(t) = B_0 \cos(\omega t + \phi).$$

O valor instantâneo do vetor de Poynting será

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{1}{\mu} E(t) B(t) = \frac{1}{\mu} E_0 B_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{\mu} E_0 B_0 (\cos^2 \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \omega t \sin \phi). \end{aligned}$$

Apenas a primeira parcela contribui para a sua média temporal

$$\langle S \rangle_t = \frac{1}{2\mu} E_0 B_0 \cos \phi,$$

porque a média temporal da segunda, envolvendo $\sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$, é nula.

No caso em questão da reflexão total, para a componente normal de \mathbf{S} temos $\phi = \pi/2$ e $\langle S_n \rangle_t = 0$. Assim, não há fluxo líquido de energia para dentro do meio 2, o que explica a transmitância nula.

A.2 Ondas em condutores: absorção

O formalismo que utilizamos para tratar as ondas em isolantes pode ser estendido de uma maneira simples para o caso de condutores. Para isso vamos expressar o que foi feito em termos de condutividade elétrica. A condutividade elétrica de um meio é definida através da lei de Ohm

$$\mathbf{J}_\ell = \sigma_\ell \mathbf{E},$$

onde usamos o subscrito ℓ para salientar o fato de que estas grandezas são associadas ao que chamamos de *correntes livres*. Quando utilizamos o formalismo complexo para descrever os campos senoidais a condutividade é a razão entre duas funções complexas e

pode, também, ser complexa. A situação é completamente análoga ao tratamento dos circuitos de corrente alternada onde a impedância pode ser complexa. A parte imaginária da impedância reflete uma defasagem entre o estímulo (tensão) e a resposta (corrente). Para condutores, quando a frequência de oscilação do campo elétrico é pequena, a corrente está em fase com o campo e a condutividade é real. Para frequências altas há uma defasagem e a condutividade apresenta uma parte imaginária (ver Seção A.5).

No desenvolvimento anterior aplicado aos isolantes a única contribuição considerada para a corrente do meio material foi a corrente de polarização (seção 6.1):

$$\mathbf{J}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Vamos determinar a condutividade associada a esta contribuição. Para isso lembramos que para um dielétrico $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$, onde $\chi_e = \kappa - 1$ é a susceptibilidade elétrica. Para um campo senoidal descrito no formalismo complexo onde a dependência temporal em cada ponto do espaço é da forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, temos

$$\mathbf{J}_P = \chi_e \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E},$$

ou seja

$$\sigma_P = -i\omega \chi_e \epsilon_0 = -i\omega (\epsilon - \epsilon_0).$$

A condutividade σ_P é puramente imaginária porque a corrente de polarização se encontra defasada de 90° em relação ao campo elétrico. Esta condutividade puramente imaginária conduziu à relação de dispersão (6.11)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{n^2} = \frac{1}{\mu\epsilon}.$$

Se expressarmos a permissividade elétrica do meio, ϵ , função de σ_P , obtemos para o índice de refração do meio a relação

$$n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \kappa_m \left(1 + i \frac{\sigma_P}{\omega \epsilon_0} \right),$$

onde $\kappa_m = \mu/\mu_0$ é a permeabilidade magnética relativa.

Para obter o índice de refração de um material condutor, tudo que temos que fazer é substituir σ_P nesta expressão pela condutividade total do meio, que inclui contribuição das correntes livres

$$\sigma = \sigma_\ell + \sigma_P.$$

O resultado é

$$\boxed{n^2 = \kappa \kappa_m \left(1 + i \frac{\sigma_\ell}{\omega \epsilon} \right)}, \quad (\text{A.1})$$

onde utilizamos $-i\omega(\epsilon - \epsilon_0)$ em lugar de σ_P e colocamos a constante dielétrica κ em evidência. Isto mostra que em condutores, onde σ_ℓ tem uma parte real não nula, o índice de refração é um número complexo, com uma parte imaginária não nula. Como $k^2 = n^2 \omega^2 / c^2$, o vetor de onda também é necessariamente complexo. Como vimos na seção A.1, uma parte imaginária no vetor de onda resulta numa onda evanescente, com amplitude decaindo a medida que avança para dentro do condutor.

Para examinar em detalhe as conseqüências deste resultado vamos considerar uma onda proveniente de um meio isolante (como o vácuo) incidindo sobre a superfície do

condutor, cujo vetor de é \mathbf{k}_i , com ângulo de incidência θ_i . Do lado do isolante o índice de refração n_1 é real e portanto as componentes de \mathbf{k}_i também são reais. No condutor $n_2 = n_R + in_I$ é complexo. Escrevemos o vetor de onda no condutor \mathbf{k}_2 em termos de suas componentes tangencial k_{2t} e normal k_{2n} à superfície de separação entre os meios. Utilizando as direções definidas na seção A.1:

$$\mathbf{k}_2 = k_{2t} \hat{y} + k_{2n} \hat{z}.$$

Assim, a relação de dispersão implica

$$k_2^2 = k_{2t}^2 + k_{2n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_R^2 - n_I^2 + 2in_R n_I).$$

Entretanto, pela forma original da Lei de Snell (6.20), $k_{2t} = k_{ti}$. Isto define completamente a componente tangencial, $k_{2t} = k_i \sin \theta_i$, que é, assim, puramente real. O resultado é que a componente normal k_{2n} deve ser complexa. Ela tem uma parte real e uma parte imaginária. Vamos escrever o resultado em termos de $k_i = 2\pi/\lambda_1$, o módulo do vetor de onda da onda incidente:

$$k_{2n}^2 = k_i^2 \left(\frac{n_R^2 - n_I^2}{n_1^2} - \sin^2 \theta_i + i \frac{2n_R n_I}{n_1^2} \right).$$

Para obter k_{2n} temos que computar a raiz quadrada deste complexo. O resultado em si é complicado. Basta sabermos que a componente normal k_{2n} tem a forma

$$k_{2n} = k_R + ik_I = |k_{2n}| e^{i\phi}.$$

A situação é similar ao que ocorre no caso da reflexão total, mas com uma diferença importante: o argumento ϕ , que determina a diferença de fase entre os campos elétricos e magnéticos tangenciais à superfície de separação não é necessariamente $\pi/2$. Isto faz com que a média temporal da componente normal do vetor de Poynting na superfície, $\langle S \rangle_t \propto \cos \phi$, seja diferente de 0: ou seja há um fluxo líquido de energia para dentro do condutor. Não vamos mostrar os detalhes, mas o que isto significa é que a transmitância não é necessariamente nula e a refletância pode ser menor que 1. Como se trata de uma onda evanescente, este fluxo de energia diminui com a penetração no condutor (ver Figura A.1), o que significa que a energia eletromagnética está sendo consumida. Ela está sendo transformada em calor por efeito Joule: este é o fenômeno da *absorção*.

No caso de incidência normal, $\sin \theta_i = 0$, e as expressões se simplificam resultando:

$$|k_{2n}| = \frac{k_i}{n_1} \sqrt{n_R^2 + n_I^2} = \frac{2\pi |n_2|}{\lambda_1 n_1}, \quad \text{e} \quad \phi = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1} \left(\frac{2n_R n_I}{n_R^2 - n_I^2} \right),$$

onde $|n_2| = \sqrt{n_R^2 + n_I^2}$ é o módulo do índice de refração complexo. Note que o comprimento de penetração da onda no meio é dado por

$$\delta z = \frac{1}{k_I} = \frac{1}{|k_{2n}| \sin \phi} = \frac{n_1}{|n_2|} \frac{\lambda_1}{2\pi \sin \phi}.$$

Vamos analisar as situações extremas.

Maus condutores: Se a condutividade do meio é baixa, $\sigma_\ell \ll \omega\epsilon$, a expressão (A.1) para o índice de refração do meio indica que

$$n_R \approx \sqrt{\kappa\kappa_m} \gg n_I,$$

Como a parte imaginária é muito pequena $\phi \approx \sin \phi \ll 1$ e o comprimento de penetração δz pode equivaler a muitos comprimentos de onda λ_1 . Entretanto, como $\cos \phi \approx 1$ a absorção é praticamente completa, o que significa que não pode haver onda refletida. Este é o caso, por exemplo, da opaca grafite.

Bons condutores: Se a condutividade do meio é alta, tal que $\sigma_\ell \gg \omega\epsilon$, o quadrado do índice de refração do meio (A.1) tem módulo muito maior que 1 e é quase que puramente imaginário. Isto resulta que as partes real e imaginária do índice de refração são muito parecidas¹

$$n_R \approx n_I \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_\ell}{\omega\epsilon} \gg 1.$$

Nestas condições $\phi \rightarrow \pi/2$ e $\sin \phi \rightarrow 1$. Porque $|n_2| \gg 1$, o comprimento de penetração $\delta z \ll \lambda_1$, ou seja os campos eletromagnéticos penetram o condutor numa região pequena comparada com o comprimento de onda. Este comprimento é tão menor quanto menor for a frequência da onda incidente. Mas $\cos \phi \approx 0$, o que significa que não há fluxo de energia para dentro do condutor. Neste caso não há absorção, e como na situação discutida na seção A.1 há reflexão total. Este é o caso dos metais em geral, e explica porque, quando polidos, eles se apresentam brilhantes.

A.3 Outra visão das ondas nos materiais

Como vimos até aqui, uma onda eletromagnética se propaga num meio isolante, mas é atenuada quando entra num meio condutor. Vamos interpretar este contraste de uma maneira mais detalhada.

O campo eletromagnético dentro de um material é a superposição do campo eletromagnético proveniente das fontes (cargas e correntes) externas com o campo eletromagnético devido às cargas e correntes no material, que são geradas pelo estímulo do campo eletromagnético ali presente. Assim, o campo eletromagnético num material depende das correntes induzidas, que por sua vez dependem do campo eletromagnético. A situação parece complicada, mas o resultado é completamente descrito pelas Equações de Maxwell que desenvolvemos na seção 6.1.

Nas Notas de Aula 4 (seção 4.3) estudamos a onda eletromagnética proveniente de uma lâmina de corrente. A principal característica do resultado lá obtido é que o campo elétrico é oposto à direção da corrente. No caso de uma onda senoidal, ela onda se propaga a partir da lâmina de corrente com uma diferença de fase de 180° em relação à corrente.

Suponha uma onda plana senoidal se propagando no vácuo para a direita (ao longo da direção z) e incidindo perpendicularmente na superfície de um material constituído de uma lâmina muito estreita de espessura δz localizado em $z = 0$, como esboçado na Figura A.2. O campo elétrico da onda incidente (na direção y) tem a forma

$$E_i(z,t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

com $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Este seria o campo elétrico em toda a região se a lâmina de material não estivesse presente. Consideramos que $\delta z \ll \lambda$. O campo $E_i(0,t)$ atuando sobre as cargas e dipolos elétricos do material vai dar origem a uma corrente oscilante. Esta corrente pode ser descrita através da condutividade do material, $\sigma = J/E$. A densidade

¹Lembre-se que $i = e^{i\pi/2}$ e $\sqrt{i} = \pm e^{i\pi/4} = \pm(1+i)/\sqrt{2}$.

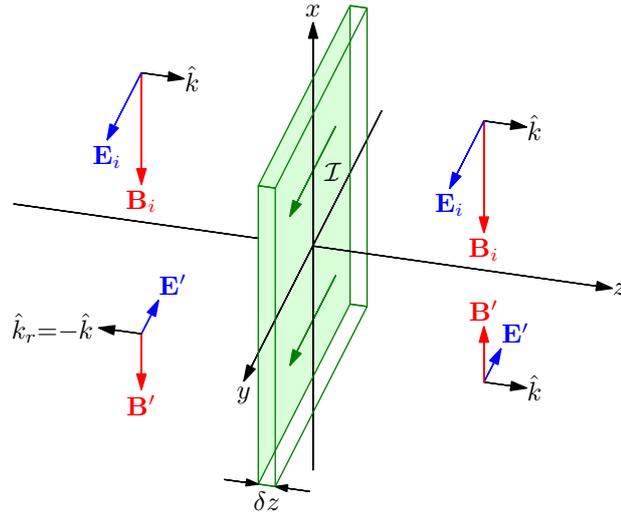


Figura A.2: Uma onda eletromagnética, $E_i(\mathbf{r}, t)$ se propagando no vácuo com velocidade c , passa por uma estreita lâmina de material de espessura δz localizada em $z = 0$. A corrente excitada no material pela onda incidente gera as duas ondas $E'(\mathbf{r}, t)$ que se propagam para longe da lâmina, também com velocidade c .

de corrente superficial (por unidade de largura na direção perpendicular à corrente) correspondente é

$$\mathcal{I}(t) = \delta z J(t) = \delta z \sigma E_0 e^{-i\omega t} = \mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}.$$

Esta corrente laminar oscilante em $z \approx 0$ dá origem a duas ondas eletromagnéticas: uma se propagando para a direita e a outra se propagando para a esquerda, ambas com velocidade c . O campo elétrico destas ondas se escreve (equações 4.12 e 4.13 das NA4):

$$E'(z, t) = -\frac{1}{2}\mu_0 c \mathcal{I}(t - |z|/c) = -\frac{1}{2}\mu_0 c \mathcal{I}_0 e^{-i\omega(t - |z|/c)}.$$

Em $z < 0$ esta onda propaga para a esquerda e constitui a *onda refletida*:

$$E'(z < 0, t) = -\frac{1}{2}\mu_0 c \mathcal{I}_0 e^{-i\omega(t + z/c)} = -\frac{1}{2}\mu_0 c \mathcal{I}_0 e^{-i(kz + \omega t)}.$$

Nesta região existe a onda incidente, mas esta se propaga para a direita.

Em $z > 0$ a onda devida à corrente na lâmina se propaga para a direita

$$E'(z > 0, t) = -\frac{1}{2}\mu_0 c \mathcal{I}_0 e^{-i\omega(t - z/c)} = -\frac{1}{2}\mu_0 c \mathcal{I}_0 e^{i(kz - \omega t)}.$$

A superposição das duas ondas se propagando para a direita com velocidade c na região $z > 0$ resulta no que chamamos *onda transmitida*.

$$E_t(z, t) = E_i(z, t) + E'(z, t) = E_0 \left(1 - \frac{1}{2}\mu_0 c \sigma \delta z\right) e^{i(kz - \omega t)},$$

onde usamos $\mathcal{I}_0 = \sigma E_0 \delta z$.

Se a condutividade σ é real e positiva, como num condutor, o campo E' é, em cada instante, oposto a E_i , de forma que $E_t < E_i$. A lâmina condutora gera uma onda que atenua o campo da onda incidente. Se o condutor fosse espesso, a sua próxima camada seria excitada por este campo ligeiramente atenuado e produziria uma atenuação adicional. É este fato que dá origem a uma onda evanescente no interior de um condutor. Como a corrente no condutor está sempre em fase com o campo elétrico ($\phi = 0$), há uma potência líquida transferida pela onda às cargas oscilantes (efeito Joule), o que explica a absorção.

Se o material é isolante, como vimos na seção anterior, a condutividade é puramente imaginária $\sigma = -i\omega(\epsilon - \epsilon_0) = -i\omega\epsilon_0(\kappa - 1)$. Isto significa que $\mathcal{I}(t)$ e o campo E' oscilam com uma defasagem de 90° em relação ao campo E_i , resultando

$$E_t(z,t) = E_i(z,t) + E'(z,t) = E_0 (1 + i\omega(\kappa - 1)\delta z/2c) e^{i(kz - \omega t)},$$

Como $\omega\delta z/c = 2\pi\delta z/\lambda$ é pequeno, podemos usar a aproximação $e^{ix} \approx 1 + ix$ para escrever o termo entre parênteses, obtendo

$$E_t(z,t) = E_0 e^{i\omega(\kappa-1)\delta z/2c} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Juntando os dois termos obtemos para o expoente de e

$$i \{kz - \omega [t - (\kappa - 1)\delta z/2c]\}.$$

Isto mostra que $E_t(z,t)$ tem a mesma amplitude que $E_i(z,t)$, mas oscila ligeiramente defasado, no caso com um atraso

$$\delta t = (\kappa - 1)(\delta z/2c).$$

Este atraso é equivalente a considerar que a velocidade com que a onda atravessa o meio (durante o intervalo δz), v , é diferente da velocidade no vácuo c . Esta velocidade v é denominada *velocidade de fase* (Note que não há nada físico que se propague com a velocidade v). O efeito cumulativo do atraso de fase por camadas sucessivas de um material espesso é descrito por um índice de refração $n = c/v > 1$.

A.4 Polarização

Polarização e polarizadores são discutidos na Seção 24.9 do livro texto. Aqui vamos dar uma interpretação mais profunda do fenômeno baseado no que aprendemos nestas Notas.

A polarização de uma onda eletromagnética é definida pela direção do seu campo elétrico. As ondas que vimos até agora têm uma direção fixa do campo elétrico (e conseqüentemente do campo magnético) que se mantém num ponto qualquer em qualquer instante. Elas são ditas *linearmente polarizadas*. O plano definido pela direção fixa do campo elétrico e pela direção de propagação é chamado *plano de polarização*.

Considere uma superposição de ondas deste tipo com freqüências diferentes, cada qual com uma direção diferente de polarização. Um exemplo é a luz proveniente de uma lâmpada, que é gerada pelo movimento de vibração independente de átomos ou moléculas. Tanto a direção quanto a freqüência ou fase das vibrações são independentes e, por conseqüência, as direções dos campos elétricos associados à onda gerada por cada um deles. O campo elétrico resultante num ponto qualquer do espaço muda constantemente de direção. Este tipo de onda é dita *não polarizada*.

A.4.1 Polarizadores

Alguns materiais como o polaróide se comportam de maneira muito peculiar. As suas propriedades elétricas são altamente anisotrópicas, ou seja a resposta do material depende fortemente da direção do campo elétrico que excita as suas moléculas. Ele é constituído microscopicamente por moléculas em forma de longas cadeias de hidrocarbonetos que são orientadas paralelamente umas às outras no processo de fabricação. O material, na forma de uma folha fina, é mergulhado numa solução contendo iodo, que adere

às cadeias e as torna condutoras. A condução é alta ao longo das cadeias, mas muito baixa entre elas, de maneira que correntes elétricas significativas só são permitidas paralelamente às cadeias.

Um polarizador é feito de uma lâmina fina de um material deste tipo, com as cadeias orientadas numa direção ao longo do plano da lâmina. Quando uma onda incide no polarizador, ele se comporta como um condutor em relação à componente do campo elétrico paralela às cadeias, resultando na absorção praticamente completa desta componente. A onda transmitida só vai conter campo elétrico perpendicular às cadeias, para o qual o material se comporta como um isolante. Como as folhas são finas a transmissão desta componente é muito alta. Assim, a luz transmitida através de uma folha de polaróide resulta linearmente polarizada, com o campo elétrico orientado na direção perpendicular às cadeias. Esta direção (perpendicular à orientação das cadeias) é denominada *eixo de transmissão* do polarizador.

Neste tipo de material o vetor densidade de corrente não é paralelo ao campo elétrico e a forma que temos utilizado para a lei de Ohm não mais se aplica. Para descrever as propriedades elétricas deste tipo de material escrevemos a lei de Ohm na forma

$$J_{\parallel} = \sigma E_{\parallel}; \mathbf{J}_{\perp} = 0,$$

onde \parallel e \perp é em relação às cadeias. Como vimos na seção anterior, as ondas eletromagnéticas geradas por uma lâmina de corrente tem o campo elétrico paralelo à corrente.

A.4.2 Polarização por reflexão

Outro fenômeno demonstrado nas Figuras 6.3 e 6.4 é a *polarização por reflexão*. A refletância para a componente do campo elétrico paralela ao plano de incidência é sempre menor que a da componente perpendicular. Isto é mostrado em detalhe na Figura A.3 que mostra a razão entre os dois coeficientes de reflexão. Isto significa que a direção do campo elétrico na onda refletida é sempre mais próxima da perpendicular ao plano de incidência do que na onda incidente. Aplicado a uma superposição de ondas não polarizada, este resultado indica que a superposição das ondas refletidas tem uma direção de campo elétrico melhor definida do que a onda incidente. Ou seja a onda refletida tem um maior grau de polarização (na direção perpendicular ao plano de incidência) que a onda incidente original.

Para o ângulo de incidência tal que

$$\tan \theta_{rc} = \frac{n_2}{n_1}$$

a equação (6.24) resulta $r_{\parallel} = 0$ e o campo elétrico da onda refletida é exatamente perpendicular ao plano de incidência. A polarização por reflexão, neste caso, é completa.

Para o ângulo de incidência $\theta_i = \theta_{rc}$, os vetores de onda \mathbf{k}_r , da onda refletida, e \mathbf{k}_t , da onda transmitida, devem fazer num ângulo de 90° , $\mathbf{k}_r \perp \mathbf{k}_t$. O movimento de oscilação dos dipolos elétricos no meio 2 em resposta à componente paralela do campo elétrico da onda transmitida é, neste caso, numa direção paralela a que seria a direção de propagação da onda refletida. Mas, como vimos na seção 5.6 das Notas de Aula 4 onde discutimos a onda eletromagnética de uma carga oscilante, não pode haver onda irradiada nesta direção.

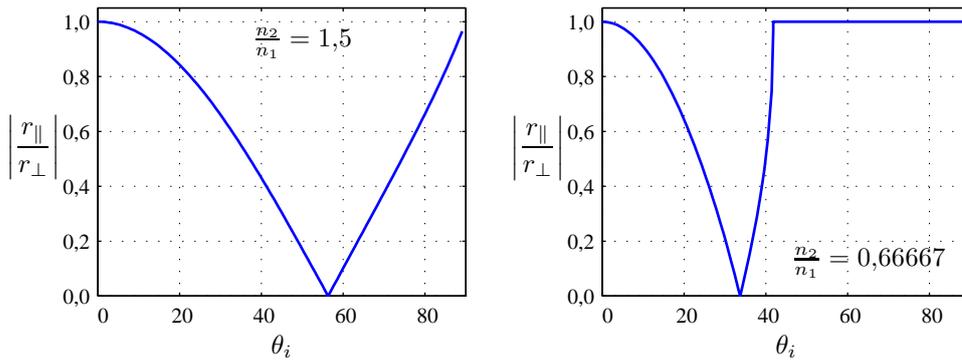


Figura A.3: Razão entre os coeficientes de reflexão r_{\parallel} e r_{\perp} em função do ângulo de incidência θ_i , ilustrando o fenômeno da polarização por reflexão.

A.5 Modelo mecânico para a condutividade elétrica

Como já salientamos, tanto a constante dielétrica quanto a condutividade elétrica de uma material dependem da frequência. Neste seção vamos usar um modelo mecânico simples para entender qualitativamente esta dependência.

Neste modelo tratamos o material como uma coleção de dois tipos de partículas cada um distribuído uniformemente pelo material com uma densidade volumétrica n . As partículas de um tipo, de carga positiva q , tem massa M muito grande e são consideradas fixas no espaço. O outro tipo, de carga negativa $-q$ e massa m podem se mover. A equação de movimento destas partículas móveis na presença de um campo elétrico E na direção x é dada por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2x - \frac{m}{\tau}v - qE.$$

O primeiro termo da direita, uma força do tipo mola, representa o caso em que a partícula está presa a um centro de força, localizado em $x = 0$, como no caso das cargas dos átomos ou moléculas num isolante. O segundo termo é uma força do tipo viscosa, que representa a dissipação por colisões com outras partículas ou imperfeições (caracterizada pelo tempo médio entre colisões τ) como acontece com os elétrons livres de um condutor. Esta é a equação de movimento de um oscilador harmônico, de frequência natural ω_0 , amortecido e excitado por uma força externa.

Consideramos um campo oscilante, de frequência ω , que representamos pelo formalismo complexo na forma

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}.$$

No regime estacionário, a solução desta equação de movimento é uma função $x(t)$ que oscila com a mesma frequência ω da força externa. A posição da partícula pode ser representada por

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t},$$

e a sua velocidade por

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -i\omega x = v_0 e^{-i\omega t}.$$

As amplitudes x_0 e v_0 são complexas permitindo descrever eventuais diferenças de fase das grandezas correspondentes em relação à força externa.

Levando esta forma de $x(t)$ à equação de movimento obtemos

$$-m\omega^2 x_0 = -m\omega_0^2 x_0 + i \frac{m}{\tau} \omega x_0 - qE_0,$$

depois de eliminar o fator comum $e^{-i\omega t}$. Resolvendo para a amplitude x_0 , obtemos

$$x_0 = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega/\tau} \frac{q}{m} E_0,$$

e para a amplitude da velocidade v_0 ,

$$v_0 = -i\omega x_0 = \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega/\tau} \frac{-q}{m} E_0.$$

A densidade de corrente associada ao conjunto de partículas será dada por $J = (-nq)v$, onde $-nq$ é a densidade de carga associada às partículas de carga $-q$. Tomando $J = \sigma E$, obtemos uma expressão para a condutividade em função da frequência

$$\sigma(\omega) = \frac{nq^2}{m} \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega/\tau}.$$

Como vemos, em geral, a condutividade é complexa.

Para descrever um isolante perfeito, sem dissipação, fazemos $\tau = \infty$, obtendo uma condutividade puramente imaginária:

$$\sigma_P(\omega) = \frac{nq^2}{m} \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Obtemos a constante dielétrica equivalente através da relação $\sigma_P(\omega) = -i\omega(\epsilon - \epsilon_0)$:

$$\kappa = \epsilon/\epsilon_0 = 1 + \frac{nq^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Isto mostra como κ pode depender da frequência. Para frequências abaixo da frequência natural, $\omega < \omega_0$, o índice de refração $\sqrt{\kappa} > 1$. Esta é a condição para os materiais transparentes à luz visível. Para frequências mais altas, $\omega > \omega_0$, o índice de refração $\sqrt{\kappa} < 1$ de modo que a velocidade de fase das ondas no meio $v > c$. Não há nenhum problema nisto porque, como discutimos anteriormente, nada se propaga com esta velocidade.

Para frequências próximas da frequência natural, $\omega \approx \omega_0$, ocorre o fenômeno da ressonância. Para evitar amplitudes de movimento infinitas, temos que colocar de volta o termo dissipativo envolvendo τ , obtendo

$$\sigma(\omega \approx \omega_0) \approx \frac{nq^2\tau}{m}.$$

A condutividade é dominada pela sua parte real, o que leva à dissipação, ou absorção ressonante.

Para descrever o comportamento dos elétrons livres de um condutor, que não estão presos a nenhum átomo ou molécula, tomamos $\omega_0 = 0$, anulando a força restauradora. Neste caso obtemos

$$\sigma_\ell(\omega) = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}.$$

Note que σ_ℓ é complexa e depende da frequência. A parte real da condutividade é sempre positiva, levando necessariamente a absorção.

No limite de baixas frequências, $\omega\tau \ll 1$, a condutividade pode ser aproximada por

$$\sigma_\ell(\omega \ll 1/\tau) \approx \frac{nq^2\tau}{m} = \sigma_0.$$

Ela se torna quase puramente real e independente da frequência, se reduzindo à condutividade estática σ_0 . Esta é a situação discutida na Seção A.2.

No outro limite, quando $\omega\tau \gg 1$, a condutividade é dominada pela parte imaginária e fica

$$\sigma_\ell(\omega \gg 1/\tau) \approx i \frac{\sigma_0}{\omega\tau}.$$

Isto significa que o condutor é transparente para ondas eletromagnéticas com essas altíssimas frequências (ultra-violeta, raios-X, etc.). Como a parte imaginária da condutividade é positiva, o índice de refração é menor que 1 e a velocidade de fase $v > c$. Isto está de acordo com a discussão anterior, já que estamos no regime $\omega > \omega_0 = 0$.