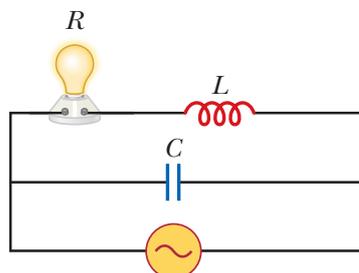




UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FSC 5120
FÍSICA IV A



NOTAS DE AULA

VERSÃO: 11/08/2011

Prof. ABÍLIO MATEUS JR.

<http://abiliomateus.net/ensino>

abilio.mateus@ufsc.br

1 Lei de Faraday e indutância	3	7.4 Intensidade do padrão de interferência para ondas eletromagnéticas	33
1.1 Experimentos de Faraday	3	8 Difração	34
1.2 Fluxo magnético	4	8.1 Difração e a teoria ondulatória da luz	34
1.3 Lei de Faraday da indução	4	8.2 O princípio de Huygens	34
1.4 A lei de Lenz	4	8.3 Difração por uma fenda	35
1.5 Campos elétricos induzidos	5	8.4 Intensidade no padrão de difração por uma fenda	36
1.6 Indutância	5	8.5 Resolução; difração por uma abertura circular	36
1.7 Cálculo da indutância	6	8.6 Intensidade do padrão de difração por fenda dupla	37
1.8 Energia armazenada em um campo magnético	7	8.7 Redes de difração	38
1.9 Circuitos RL	7	9 Luz e física quântica	39
2 Oscilações eletromagnéticas	9	9.1 Radiação de corpo negro e a teoria de Planck	39
2.1 Oscilações LC	9	9.2 Efeito fotoelétrico e a teoria de Einstein sobre o fóton	40
2.2 Oscilações amortecidas num circuito RLC	10	9.3 Espalhamento Compton	41
2.3 Oscilações forçadas e ressonância	10	9.4 A dualidade onda-partícula da luz	42
3 Circuitos de corrente alternada	12	10 Estrutura atômica	43
3.1 Fonte de corrente alternada	12	10.1 Primeiros modelos atômicos	43
3.2 Elementos de um circuito AC	12	10.2 O espectro atômico	43
3.3 Circuito RLC de malha simples	13	10.3 Modelo atômico de Bohr	44
3.4 Potência em circuitos AC	14	11 Ondas e partículas	48
3.5 O transformador	14	11.1 Propriedades ondulatórias das partículas: a hipótese de de Broglie	48
4 Propriedades magnéticas da matéria	16	11.2 O átomo e a hipótese de de Broglie	48
4.1 Os momentos magnéticos dos átomos	16	11.3 A mecânica quântica: uma nova teoria	49
4.2 Magnetização e intensidade do campo magnético	17	11.4 A função de onda e sua interpretação	50
4.3 Classificação das substâncias magnéticas	18	11.5 Princípio da incerteza	51
5 Equações de Maxwell	20	11.6 Visão dos átomos na mecânica quântica	52
5.1 Lei de Gauss para o magnetismo	20		
5.2 Corrente de deslocamento e a lei de Ampère generalizada	21		
5.3 Equações de Maxwell	22		
6 Ondas eletromagnéticas	23		
6.1 Ondas eletromagnéticas planas	23		
6.2 Descrição matemática de uma onda eletromagnética	23		
6.3 O espectro das ondas eletromagnéticas	25		
6.4 Energia transportada pelas ondas eletromagnéticas	26		
6.5 Momento e pressão de radiação	27		
6.6 Polarização	28		
7 Interferência	30		
7.1 A natureza da luz	30		
7.2 Interferência de ondas	30		
7.3 Interferência com fendas duplas	31		

1.1 EXPERIMENTOS DE FARADAY

Michael Faraday (1791–1867), universalmente considerado como um dos maiores experimentadores de todos os tempos, era filho de um ferreiro, um de dez irmãos, e só teve instrução primária. Trabalhou como entregador de jornais e, aos 12 anos, empregou-se como aprendiz de encadernador. Educou-se também lendo os livros que encadernava, em particular a “Enciclopédia Britânica”.

As “Pesquisas Experimentais sobre Eletricidade”, que Faraday começou a publicar em 1832, contém inúmeras descobertas fundamentais: eletroquímica, a constante dielétrica, paramagnetismo e diamagnetismo, o “efeito Faraday” em magneto-ótica, e muitas outras. Foi ele quem criou a imagem das linhas de força, que usava constantemente, raciocinando de forma totalmente intuitiva, pois não tinha preparo matemático.

Entre 1823 e 1826, outro grande experimentador, o francês François Arago (1786–1853) havia mostrado que uma barra de ferro não-ímantada se imanta quando nela se enrola um solenóide percorrido por uma corrente elétrica. Ocorreu a mais de um cientista procurar um efeito inverso: usar um ímã permanente para produzir uma corrente numa bobina.

Em agosto de 1831, Faraday conseguiu demonstrar tal fato. Em uma experiência, Faraday enrolou 70 m de fio de cobre em torno de um bloco de madeira, inserindo um galvanômetro¹ no circuito. Enrolou outros 70 m, isolados do primeiro, e ligou-os a uma bateria. A princípio, ficou desapontado: uma corrente estacionária no segundo circuito não afetava o galvanômetro, ligado ao primeiro. Faraday notou, porém, que aparecia uma deflexão no galvanômetro quando — e só quando — o outro circuito era ligado ou desligado. Ou seja: a corrente era induzida pela variação do campo magnético devido ao outro circuito. O resultado foi comunicado à Royal Society em 24 de novembro de 1831. O físico americano Joseph Henry publicou uma observação semelhante em 1832.

¹ Instrumento utilizado para medir corrente elétrica.

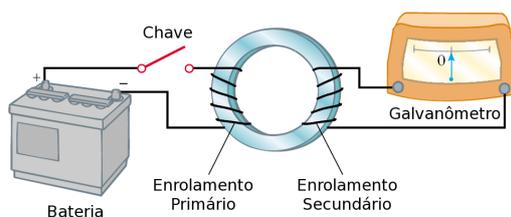


Figura 1.1 – Experimento de Faraday. Quando a chave no circuito primário é fechada, o galvanômetro no circuito secundário se desvia momentaneamente. A corrente induzida no circuito secundário é causada pela variação do campo magnético através da bobina secundária. ©Serway–Jewett

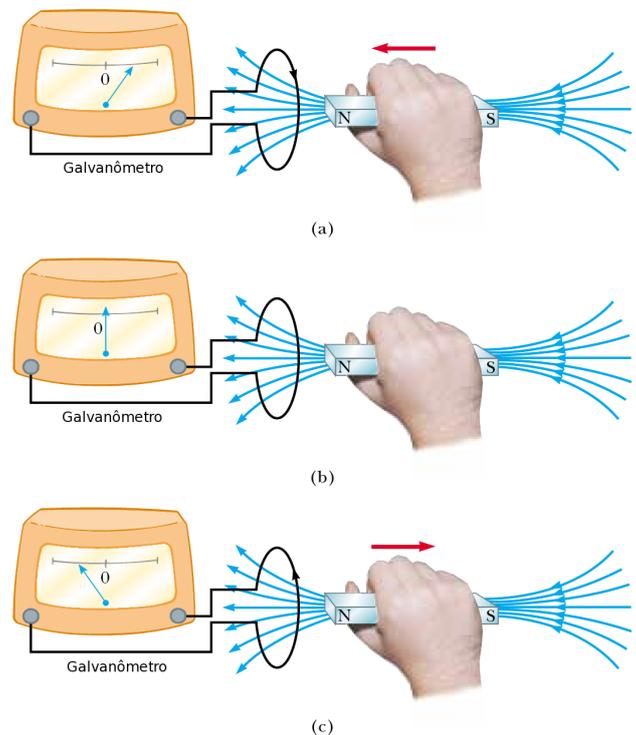


Figura 1.2 – (a) Quando um ímã é deslocado em direção a uma espira de fio conectada a um galvanômetro, este se desvia, como é mostrado, indicando que uma corrente é induzida na espira. (b) Quando o ímã é mantido estacionário, nenhuma corrente é induzida na espira, mesmo quando o ímã está dentro da espira. (c) Quando o ímã é afastado da espira, o galvanômetro desvia-se na direção oposta, indicando que a corrente induzida é oposta àquela mostrada na parte (a). ©Serway–Jewett

Numa experiência posterior, Faraday aproximou um ímã permanente, de formato cilíndrico, de um solenóide ligado a um galvanômetro. Quando a barra era introduzida no solenóide, o galvanômetro acusava a passagem de uma corrente. Quando era removida, produzia-se uma corrente em sentido oposto. Faraday percebeu logo que um efeito análogo se produzia quando o solenóide era aproximado ou afastado do ímã, ficando este em repouso: a indução de corrente dependia apenas do movimento relativo entre o ímã e a bobina, resultando numa variação do campo magnético que a atravessava.

Foi para encontrar a lei quantitativa da indução que Faraday introduziu o conceito de linhas de força, definindo o que hoje corresponde ao fluxo do campo magnético através de um circuito.

©Moyses Nussenzveig, Física Básica, Vol. 3

1.2 FLUXO MAGNÉTICO

O fluxo associado com o campo magnético é definido de maneira similar ao fluxo elétrico e é proporcional ao número de linhas do campo magnético que atravessam uma área qualquer. Definimos o fluxo magnético Φ_B através de uma superfície como

$$(1.1) \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

onde $d\vec{A}$ é um vetor perpendicular à superfície com módulo igual à área dA . A unidade SI do fluxo magnético é o weber:

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

1.3 LEI DE FARADAY DA INDUÇÃO

Faraday descobriu que uma força eletromotriz e uma corrente podem ser induzidas em uma espira fazendo variar a quantidade de campo magnético que atravessa a espira. Percebeu ainda que a “quantidade de campo magnético” pode ser visualizada em termos das linhas de campo magnético que atravessam a espira. Usando a definição de fluxo magnético, podemos enunciar a lei de indução de Faraday da seguinte forma:

O módulo da força eletromotriz \mathcal{E} induzida em uma espira condutora é igual à taxa de variação temporal do fluxo magnético Φ_B que atravessa a espira.

Como veremos na próxima seção, a força eletromotriz induzida \mathcal{E} se opõe à variação do fluxo, de modo que, matematicamente, a lei de Faraday pode ser escrita como

$$(1.2) \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

onde \mathcal{E} é a fem induzida e Φ_B é o fluxo magnético através da espira condutora.

Se o fluxo magnético através de uma bobina de N espiras sofre uma variação, uma fem induzida aparecerá em cada espira, e a fem induzida total no circuito será o somatório dos valores individuais. Se a taxa de variação do fluxo for a mesma para cada uma das N espiras, a fem induzida será dada por

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Há três maneiras de variar o fluxo magnético que atravessa uma bobina e para induzir uma corrente elétrica:

1. Mudar o módulo de \vec{B} .
2. Mudar a área total da bobina ou a parte da área atravessada pelo campo magnético.
3. Mudar o ângulo entre a orientação do campo magnético \vec{B} e o plano da bobina (girando-a, por exemplo).

1.4 A LEI DE LENZ

O sinal negativo na Lei de Faraday está relacionado com a lei de Lenz, que nos permite determinar o sentido da corrente induzida em uma espira:

A corrente induzida em uma espira tem um sentido tal que o campo magnético produzido pela corrente se opõe ao campo magnético que induz a corrente.

Esta lei vale apenas para correntes induzidas que aparecem em circuitos fechados. Se o circuito for aberto, podemos usualmente pensar em termos do que poderia acontecer se ele fosse fechado e desta forma encontrar a polaridade da fem induzida.

A força eletromotriz induzida tem o mesmo sentido que a corrente induzida. Considere um ímã se aproximando de uma espira como mostrado na Figura 1.3. Se o ímã estiver inicialmente distante o fluxo magnético que atravessa a espira é zero. Quando o pólo norte do ímã se aproxima da espira com o campo magnético \vec{B} apontando para baixo o fluxo através da espira aumenta. Para se opor a esse aumento de fluxo a corrente induzida I deve criar um campo \vec{B}_{ind} apontando para cima (Figura 1.3a). De acordo com a regra da mão direita, o sentido da corrente deve ser o sentido anti-horário.

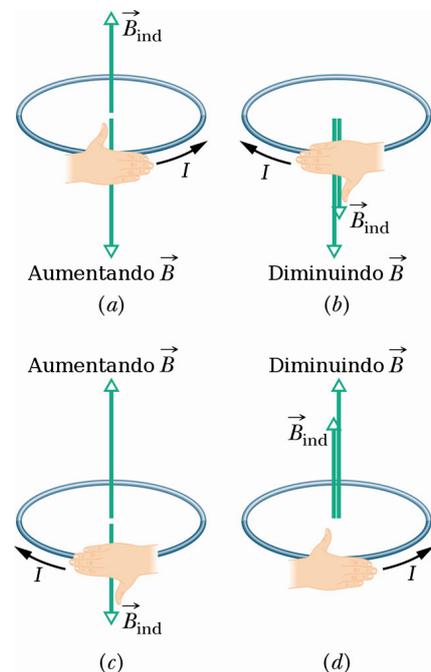


Figura 1.3 – O sentido da corrente I induzida em uma espira é tal que o campo magnético \vec{B}_{ind} produzido pela corrente se opõe à variação do campo magnético \vec{B} que induziu a corrente. O campo \vec{B}_{ind} sempre tem o sentido oposto ao sentido de \vec{B} se \vec{B} está aumentando (a e c), e o mesmo sentido que \vec{B} se \vec{B} está diminuindo (b e d). A regra da mão direita fornece o sentido da corrente induzida a partir do sentido do campo induzido. ©Halliday

Note que o fluxo de \vec{B}_{ind} sempre se opõe à variação do fluxo de \vec{B} , mas isso não significa que \vec{B} e \vec{B}_{ind} sempre têm sentidos opostos. Por exemplo, quando afastamos o ímã da espira o fluxo Φ_B produzido pelo ímã tem o mesmo sentido que antes (para baixo), mas agora está diminuindo. Nesse caso, como mostra a Figura 1.3b, o fluxo de \vec{B}_{ind} também deve ser para baixo, de modo a se opor à diminuição do fluxo Φ_B . Portanto, \vec{B} e \vec{B}_{ind} têm o mesmo sentido.

As Figuras 1.3c e 1.3d mostram as situações em que o pólo sul do ímã se aproxima e se afasta da espira, respectivamente.

1.5 CAMPOS ELÉTRICOS INDUZIDOS

Considere uma partícula de carga q_0 que se move ao longo de uma circunferência de raio r . O trabalho W realizado sobre a partícula pelo campo elétrico durante uma revolução completa é $W = \mathcal{E}q_0$, onde \mathcal{E} é a força eletromotriz (trabalho realizado por unidade de carga para fazer uma carga de prova descrever a trajetória). Entretanto, por definição, o trabalho também é dado por

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = (q_0 E)(2\pi r),$$

onde $(q_0 E)$ é o módulo da força que age sobre a partícula e $2\pi r$ é a distância ao longo do qual a força atua. Quando igualamos as duas expressões para o trabalho, a carga q_0 é cancelada e obtemos a seguinte relação:

$$\mathcal{E} = 2\pi r E.$$

Para uma partícula que se move em uma trajetória fechada, podemos escrever o trabalho da seguinte forma:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

onde os círculos nos sinais de integral indicam que a integral deve ser calculada para uma curva fechada. Substituindo o trabalho W por $\mathcal{E}q_0$, temos:

$$(1.3) \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

que nos dá uma relação geral entre a fem e o campo elétrico.

Agora consideremos a lei de Faraday, que diz que a variação do fluxo magnético produz uma fem induzida num circuito. Esta fem induzida representa o trabalho por unidade de carga necessário para manter a corrente induzida ou o trabalho por unidade de carga executado sobre uma partícula carregada que descreve uma curva fechada em uma região onde existe um fluxo magnético variável. Entretanto, a Eq. 1.3 nos diz que pode existir uma fem induzida mesmo que não haja uma corrente ou uma partícula: a fem induzida é a soma do produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ ao longo de uma curva fechada, onde \vec{E} é o campo elétrico induzido pela variação do fluxo magnético e $d\vec{s}$ é o elemento de comprimento.

Podemos obter uma forma mais geral para a lei de Faraday combinando a Eq. 1.3 com a expressão $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

De acordo com esta equação, **um campo magnético variável induz um campo elétrico**. Escrita dessa forma, a lei de Faraday pode ser aplicada a qualquer curva fechada que possa ser traçada em uma região onde existe um campo magnético variável.

Os campos elétricos que são produzidos pelo processo de indução não são associados a cargas, mas ao fluxo magnético variável. Embora ambos os tipos de campos elétricos exerçam forças sobre as cargas, há uma importante diferença entre eles.

A diferença de potencial entre dois pontos A e B , é

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Se quisermos que o conceito de potencial tenha alguma utilidade, esta integral precisa ter o mesmo valor para qualquer caminho que ligue os pontos A e B . De fato, verificamos que isto era verdadeiro para todos os casos discutidos nos capítulos anteriores.

Um caso especial interessante ocorre quando A e B são o mesmo ponto. O caminho que os liga é então uma curva fechada; como V_A deve ser idêntico a V_B , temos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Entretanto, quando um fluxo magnético variável está presente, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ não é zero, mas igual a $-d\Phi_B/dt$, de acordo com a lei de Faraday. Isto implica que campos elétricos associados a cargas estacionárias são *conservativos*, mas campos elétricos associados a campos magnéticos variáveis são *não-conservativos*. Os campos elétricos produzidos por indução não podem ser expressos como gradientes de um potencial elétrico, e, portanto, o potencial elétrico tem significado apenas para campos elétricos produzidos por cargas estáticas.

1.6 INDUTÂNCIA

Quando existe uma corrente em um circuito, ela produz um campo magnético que gera um fluxo magnético através do próprio circuito; quando a corrente varia, esse fluxo também varia. Portanto, qualquer circuito percorrido por uma corrente variável possui uma fem induzida nele mesmo pela variação de seu próprio fluxo magnético. Tal fem denomina-se *fem auto-induzida*. De acordo com a lei de Lenz, uma fem auto-induzida sempre se opõe à variação da corrente que produz a fem e, portanto, tende a tornar mais difícil qualquer variação da corrente. Por esta razão, a fem auto-induzida é muito importante quando existe uma corrente variável.

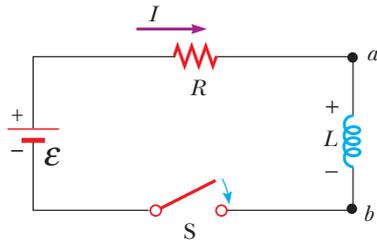


Figura 1.4 – A corrente do circuito produz um campo magnético na bobina e, portanto, um fluxo magnético através da bobina. Quando a corrente do circuito varia, o fluxo também varia, produzindo uma fem auto-induzida no circuito. ©Serway–Jewett

Uma fem auto-induzida pode ocorrer em qualquer circuito, visto que sempre existirá algum fluxo magnético através de espiras fechadas em um circuito que conduz uma corrente. Porém, o efeito é bastante ampliado quando o circuito contém uma bobina com N espiras, como em um solenóide.

Em virtude da corrente I , existe um fluxo magnético médio Φ_B através de cada espira da bobina, que é proporcional à corrente. Desta forma, podemos escrever

$$N\Phi_B \propto I.$$

Se ocorre a variação da corrente, uma variação do fluxo magnético também acontecerá, de forma que:

$$N \frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{dI}{dt},$$

onde introduzimos a constante de proporcionalidade L , chamada indutância do elemento de circuito. Integrando a equação acima obtemos a indutância em função do fluxo magnético e da corrente elétrica:

$$(1.4) \quad L = \frac{N\Phi_B}{I}.$$

Usando a equação para a lei de Faraday (1.2), e tomando apenas o módulo das quantidade envolvidas, obtemos a fem induzida pela variação da corrente elétrica num circuito com indutância L :

$$\mathcal{E}_L = L \frac{dI}{dt}.$$

Se \mathcal{E}_L é dada em volt e dI/dt em ampère/segundo, a unidade SI para a indutância é o henry (H), definido por:

$$1 \text{ henry} \equiv \frac{1 \text{ volt} \cdot \text{segundo}}{\text{ampère}}$$

Para encontrar a relação entre o sinal \mathcal{E}_L e o dI/dt , usamos a lei de Lenz. Se a corrente I diminui, de acordo com a lei de Lenz, a indutância deve se opor a esta diminuição gerando uma fem com sentido oposto àquele da variação. Por outro lado, se a corrente I aumenta, o indutor se opõe a esta variação, gerando uma fem adicional também em sentido contrário à variação da corrente. A Figura 1.5 dá um resumo das relações entre o sinal de dI/dt e o de \mathcal{E}_L . Uma outra

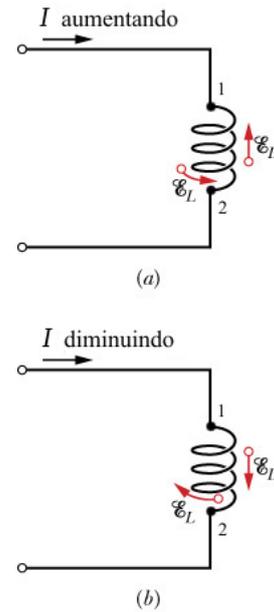


Figura 1.5 – (a) A corrente está diminuindo; a fem induzida no indutor se opõe à diminuição da corrente. (b) A corrente está aumentando; a fem induzida no indutor se opõe ao aumento da corrente. ©Halliday

forma para escrever estas relações é através da diferença de potencial entre as duas extremidades do indutor

$$V_2 - V_1 = -L \frac{dI}{dt}.$$

1.7 CÁLCULO DA INDUTÂNCIA

1.7.1 Indutância de um solenóide

Podemos utilizar a Eq. 1.4 para calcular a indutância L para uma seção de comprimento ℓ de um solenóide longo cuja área da seção reta é A ; vamos admitir que esta seção está próxima do centro do solenóide de forma que podemos desconsiderar os efeitos de borda. O campo magnético no interior de um solenóide percorrido por uma corrente I é

$$B = \mu_0 n I,$$

onde n é o número de espiras por unidade de comprimento, $n = N/\ell$. O fluxo magnético no interior do solenóide, obtido através da Eq. 1.1, é simplesmente $\Phi_B = BA$. Portanto, a indutância será dada por:

$$(1.5) \quad L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{(n\ell)\mu_0 n I A}{I} = \mu_0 n^2 \ell A.$$

Esta expressão envolve apenas fatores geométricos: a área da seção reta, o comprimento do solenóide e o número de espiras por unidade de comprimento. Esta relação é válida apenas para um solenóide de comprimento muito maior do que o seu raio.

1.7.2 Indutância de um toróide

Para um toróide de seção reta retangular mostrado na Figura 1.6, o campo magnético é dado por:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r},$$

onde N é o número total de espiras do toróide. Note que o campo magnético não é constante no interior do toróide, já que depende do raio r .

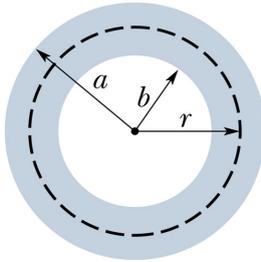


Figura 1.6 – Esquema de um toróide com raio interno a e raio externo b .

O fluxo Φ_B através da seção reta do toróide é

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b B(hdr) = \int_a^b \frac{\mu_0 IN}{2\pi r} h dr \\ &= \frac{\mu_0 INh}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 INh}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

onde h é a altura da seção reta do toróide.

Obtemos a indutância a partir da Eq. 1.4:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Notamos novamente que L depende apenas de fatores geométricos.

1.8 ENERGIA ARMAZENADA EM UM CAMPO MAGNÉTICO

Para transportar uma carga dq através de uma diferença de potencial V é preciso fornecer-lhe uma energia dqV . Logo, para manter uma corrente $I = dq/dt$ durante um tempo dt através de V , é preciso fornecer uma energia

$$dW = (I dt)V,$$

o que corresponde a uma potência (energia por unidade de tempo)

$$\frac{dW}{dt} \equiv P = IV.$$

Num circuito, a força eletromotriz, \mathcal{E} , induzida por um campo magnético variável tende a se opor à variação do fluxo

$$\mathcal{E} = -V = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Logo, a potência necessária para se manter a corrente I pode ser escrita como:

$$P = -\mathcal{E}I = \frac{d\Phi_B}{dt}I = \frac{d(LI)}{dt}I = LI\frac{dI}{dt}.$$

Ignorando perda de energia por efeito Joule (resistência desprezível) a energia total que precisa ser fornecida para fazer passar a corrente no circuito do valor $I = 0$, para $t = 0$, ao valor final I num tempo t , é

$$U_B = \int_0^t P dt = \int_0^t LI \frac{dI}{dt} dt = L \int_0^I IdI = \frac{1}{2}LI^2,$$

neste caso, U_B representa a energia armazenada no circuito de indutância L que é atravessado por uma corrente I .

1.8.1 Densidade de energia magnética

Para um solenóide muito longo de comprimento ℓ e área de seção A com n espiras por unidade de comprimento, vimos que a indutância, dada pela Eq. 1.5, é

$$L = \mu_0 n^2 \ell A,$$

de forma que, quando percorrido por uma corrente I , a energia armazenada no solenóide é

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0(nI)^2 \ell A = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0 nI)^2 \ell A.$$

Como o campo magnético induzido no solenóide é $B = \mu_0 nI$, e o volume é dado por $\mathcal{V} = A\ell$, a energia U_B pode ser escrita como

$$U_B = \frac{B^2 \mathcal{V}}{2\mu_0}.$$

Como o campo magnético está (com boa aproximação) confinado dentro do solenóide, podemos interpretar este resultado dizendo que a energia está contida no campo magnético, com densidade de energia magnética, $u_B = U_B/\mathcal{V}$ dada por

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

1.9 CIRCUITOS RL

1.9.1 Indutor

Um indutor é um elemento de um circuito que armazena energia no campo magnético gerado pela corrente que percorre seus fios, da mesma maneira que um capacitor armazena energia no campo elétrico entre suas placas carregadas. Geralmente um indutor é representado por um solenóide (símbolo ⊗⊗⊗⊗⊗).

1.9.2 Análise de um circuito RL

Considere o circuito mostrado na Figura 1.7. Vamos aplicar a lei das malhas percorrendo o circuito em sentido

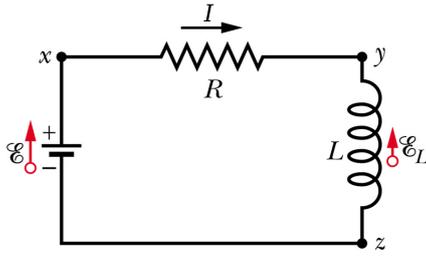


Figura 1.7 – Circuito RL. ©Halliday

horário a partir do ponto x . Entre x e y , a diferença de potencial é dada por:

$$V_y - V_x = -IR.$$

O potencial de x é mais alto que o de y . O ponto y está a um potencial mais alto que o do ponto z , pois quando a corrente aumenta, a fem induzida se opõe a este aumento com a polaridade mostrada na figura. Logo, se atravessarmos o indutor de y para z a diferença de potencial será:

$$V_z - V_y = -L \frac{dI}{dt}.$$

Ao atravessarmos a bateria encontramos um aumento no potencial dado por $+\mathcal{E}$. A lei das malhas fornece então:

$$-IR - L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E} = 0$$

ou

$$(1.6) \quad L \frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}.$$

A solução para esta equação diferencial é dada pela função $I(t)$:

$$(1.7) \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-tR/L}).$$

Note que $I(t)$ possui duas particularidades: $I(0) = 0$ (a corrente inicial é zero) e $I \rightarrow \mathcal{E}/R$ quando $t \rightarrow \infty$.

Podemos definir uma constante τ_L , tal que

$$\tau_L = \frac{L}{R},$$

que é chamada *constante de tempo indutiva*. O valor numérico desta constante dá uma medida da rapidez com que a corrente em um circuito RL tende para o valor de equilíbrio \mathcal{E}/R . Dá Eq. 1.7, fazendo $t = \tau_L$, obtemos o significado físico desta constante:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-1}) = (1 - 0,37) \frac{\mathcal{E}}{R} = 0,63 \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Logo, a constante de tempo τ_L nos dá o instante em que a corrente no circuito é menor do que o seu valor final \mathcal{E}/R por um fator $1/e$ (cerca de 37%).

Podemos então reescrever a equação de um circuito RL

como

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}).$$

Se removemos a bateria do circuito, fazendo $\mathcal{E} = 0$, temos

$$L \frac{dI}{dt} + IR = 0$$

e a solução é dada por

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau_L}$$

onde I_0 é o valor da corrente quando a bateria é removida ($t = 0$).

Neste capítulo, estudaremos como a carga q varia com o tempo num circuito constituído de um indutor L , um capacitor C e um resistor R . Discutiremos como a energia é transferida do campo elétrico do capacitor para o campo magnético do indutor e vice-versa, sendo dissipada gradualmente — no decorrer das oscilações — sob a forma de energia térmica no resistor. Para começar vamos tratar de um caso mais simples, um circuito contendo apenas um indutor e um capacitor, onde desprezaremos a resistência do condutor. Portanto, não há dissipação de energia.

2.1 OSCILAÇÕES LC

Vimos que para circuito RC e RL , a carga, a corrente e a diferença de potencial crescem e decaem exponencialmente. A escala de tempo do crescimento ou decaimento é dada por uma *constante de tempo* τ , que é ou capacitiva ou indutiva. Vamos agora demonstrar que para um circuito LC , a carga, a corrente e a diferença de potencial não variam exponencialmente, mas *senoidalmente* (com frequência angular ω). Em outras palavras, o circuito *oscila*.

Num circuito contendo um capacitor e um indutor, a energia estará armazenada nos campos elétrico e magnético, de tal forma que a energia total do sistema é dada por:

$$(2.1) \quad U = U_E + U_B,$$

onde consideramos que a resistência do circuito é zero. A energia armazenada no campo elétrico entre as placas do capacitor é

$$(2.2) \quad U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C},$$

onde C é a capacitância. A energia armazenada no campo magnético do indutor é dada por

$$(2.3) \quad U_B = \frac{1}{2} Li^2,$$

onde L é a indutância.

Exercício Observe atentamente a Figura 2.1 e analise o que acontece com a energia armazenada nos campos elétrico e magnético de um circuito LC oscilante.

A energia total do circuito é

$$(2.4) \quad U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2.$$

Como estamos supondo que a resistência é zero, não há dissipação de energia e U permanece constante, embora i e q

variem. Ou seja, $dU/dt = 0$:

$$(2.5) \quad \frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0.$$

A corrente elétrica i é

$$(2.6) \quad i = \frac{dq}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Substituindo na equação acima, obtemos

$$(2.7) \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Esta é a equação que descreve as oscilações de um circuito LC (sem resistência).

Lembrando de Física II, a equação 2.7 é semelhante à equação que descreve as oscilações mecânicas de uma partícula presa a uma mola (sem atrito):

$$(2.8) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

cuja solução é dada por

$$(2.9) \quad x = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

onde x_m é a amplitude do movimento e ϕ é uma constante de fase. Como q corresponde a x , podemos escrever a solução da equação 2.7 como

$$(2.10) \quad q = q_m \cos(\omega t + \phi),$$

onde ω é a frequência angular das oscilações eletromagnéticas. Diferenciando q em relação a t e substituindo na equação 2.7 obtemos o valor de ω :

$$(2.11) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

A constante de fase ϕ é determinada pelas condições iniciais em $t = 0$. Por exemplo, se $\phi = 0$ em $t = 0$, temos que $q = q_m$ e $i = 0$, que são as condições iniciais mostradas na Figura 2.1a. A Figura 2.2 mostra uma analogia entre as oscilações produzidas num circuito LC e num sistema mecânico massa-mola.

A energia elétrica armazenada no circuito LC é:

$$(2.12) \quad U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi),$$

e a energia magnética é

$$(2.13) \quad U_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi).$$

Somando a energia elétrica e a energia magnética, obte-

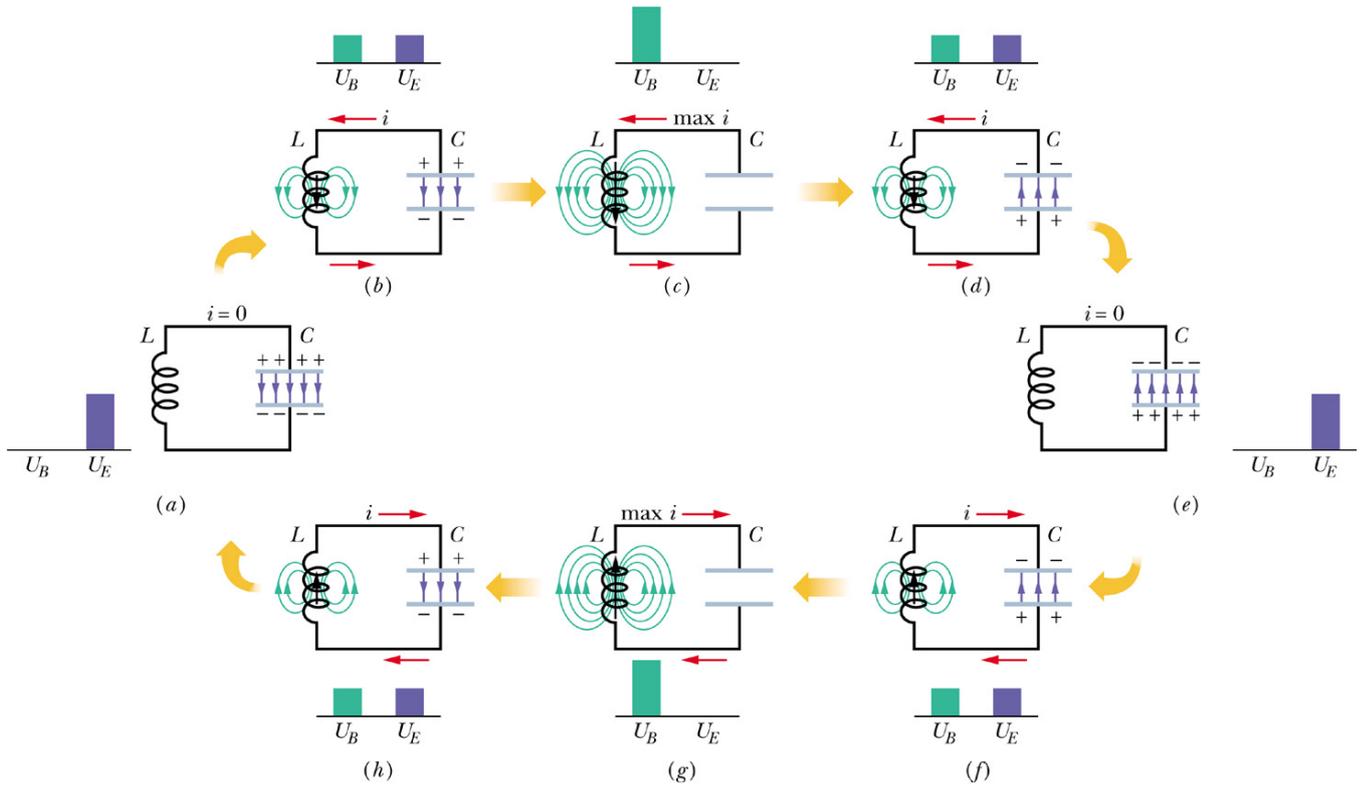


Figura 2.1 – Estágios de um ciclo de oscilação para um circuito LC sem resistência. Os gráficos em barra mostram a energia armazenada nos campos magnético e elétrico.

mos a energia total do circuito LC:

$$(2.14) \quad U = \frac{q_m^2}{2C} [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{q_m^2}{2C}.$$

2.2 OSCILAÇÕES AMORTECIDAS NUM CIRCUITO RLC

Em qualquer circuito LC real existe sempre uma resistência R. Neste caso, a energia eletromagnética total U não é mais constante, diminuindo com o tempo à medida que é transformada em energia térmica no resistor, dissipada por efeito Joule (Figura 2.3). Como veremos, este caso é idêntico ao oscilador harmônico amortecido.

Incluindo a resistência R, a energia total não é mais constante e varia através da relação

$$(2.15) \quad \frac{dU}{dt} = -i^2 R,$$

onde o sinal negativo implica que a energia é dissipada a uma taxa de $i^2 R$. Portanto, temos

$$(2.16) \quad \frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -i^2 R.$$

Novamente substituindo i por dq/dt e di/dt por d^2q/dt^2 , e

dividindo a equação acima por i , obtemos

$$(2.17) \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0.$$

que descreve as oscilações LC amortecidas. Note que se fizermos $R = 0$, a equação 2.17 se reduz à equação 2.7, que descreve as oscilações LC não amortecidas. A solução geral desta equação é dada por:

$$(2.18) \quad q = q_m e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi),$$

onde

$$(2.19) \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}.$$

Em muitos casos pode considerar $\omega' \approx \omega$.

2.3 OSCILAÇÕES FORÇADAS E RESSONÂNCIA

Considere um circuito LC amortecido contendo uma resistência R. Se o amortecimento é pequeno, o circuito oscila com uma frequência $\omega = (LC)^{-1/2}$, que é chamada de *frequência natural* do sistema.

Suponha agora que uma fem variável no tempo é aplicada ao circuito dada por

$$(2.20) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega' t,$$

através da utilização de um gerador externo (representado

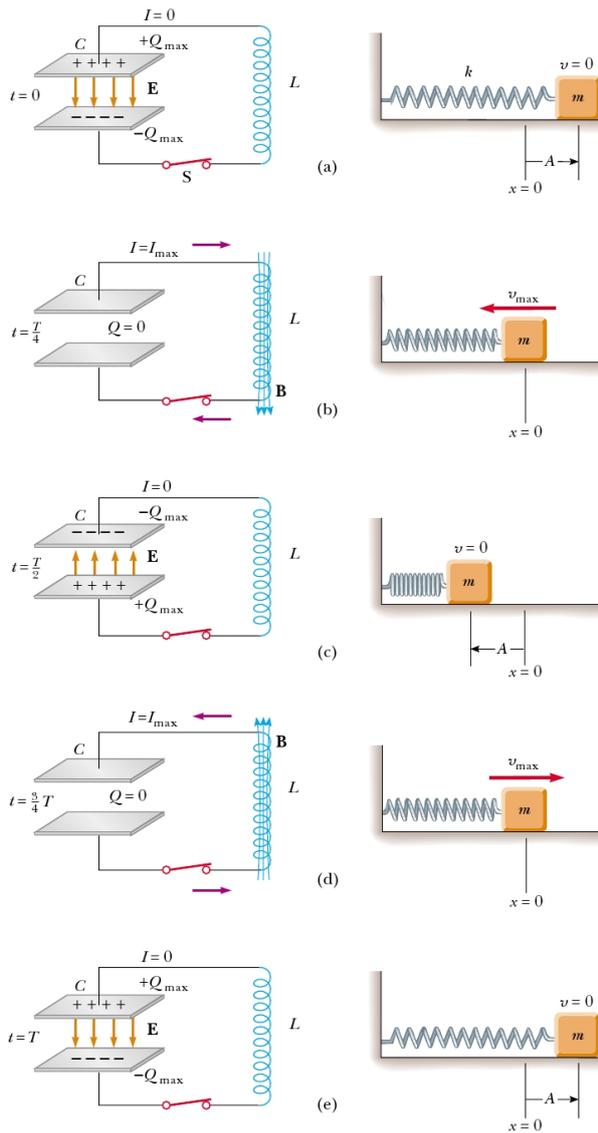


Figura 2.2 – Analogia entre as oscilações produzidas num circuito LC e num sistema mecânico massa-mola.

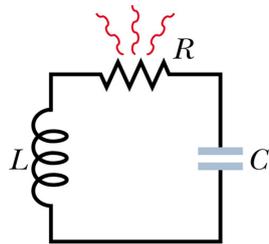


Figura 2.3 – Circuito LC com resistor R; a energia é dissipada a uma taxa de i^2R via efeito Joule.

pelo símbolo \sim). Nesta equação, ω'' é a frequência da fonte externa. Dizemos neste caso que o sistema executa oscilações forçadas.

Qualquer que seja a frequência natural do circuito ω , as oscilações da carga, corrente ou da diferença

de potencial no circuito ocorrerão com a frequência da fonte externa ω'' .

A corrente no circuito será dada pela expressão

$$(2.21) \quad i = i_m \text{sen}(\omega''t - \phi),$$

onde i_m é a amplitude da corrente. O valor de i_m será máximo quando a frequência da fonte externa ω'' for igual à frequência natural do circuito, isto é, quando

$$(2.22) \quad \omega'' = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

que chamamos de condição de *ressonância*. Uma aplicação prática da ressonância ocorre quando sintonizamos uma estação de rádio. Quando giramos o botão de sintonia, estamos ajustando a frequência natural ω de um circuito LC interno, de modo que ela se torne igual à frequência ω'' do sinal transmitido pela antena da estação que queremos sintonizar; estamos procurando por uma ressonância.

A corrente elétrica distribuída para utilização industrial e residencial é corrente alternada (AC, do inglês “*Alternating Current*”), tipicamente de frequência $f = 60$ Hz. A principal vantagem da corrente alternada é que sua voltagem pode ser facilmente amplificada ou reduzida usando transformadores. Isso permite transmitir a energia elétrica em linhas de alta voltagem, convertendo-a no valor “caseiro” (110–220 V) ao chegar a seu destino. A vantagem da transmissão de potência em alta voltagem é que a corrente i associada é baixa, reduzindo a perda por efeito Joule nos fios de transmissão (i^2R).

3.1 FONTE DE CORRENTE ALTERNADA

Um circuito de corrente alternada consiste de elementos de circuito (indutores, capacitores e resistores) e uma fonte de energia que fornece uma fem que varia com o tempo que pode ser dada, por exemplo, pela expressão

$$(3.1) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t,$$

onde \mathcal{E}_m é a amplitude da fem variável. A frequência angular ω (em rad/s) está relacionada com a frequência f (em Hz) e ao período T por

$$(3.2) \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

A fonte de fem variável, ou fonte AC, determina a frequência da corrente no circuito. Como a voltagem fornecida pela fonte AC varia senoidalmente com o tempo, ela será positiva durante metade do ciclo e negativa durante a outra metade. Da mesma forma, a corrente num circuito alimentado por uma fonte AC é uma corrente alternada que também varia senoidalmente com o tempo. Portanto, podemos escrever

$$(3.3) \quad i = i_m \sin(\omega t - \phi),$$

onde i_m é a amplitude de corrente (ou corrente máxima) e ϕ é o ângulo de fase entre \mathcal{E} e i , que indica se os valores máximos da corrente ou da voltagem ocorrem ao mesmo tempo ou não. Para um dado circuito RLC como mostrado na Figura 3.1, se considerarmos que os valores de \mathcal{E}_m , ω , R , L e C são conhecidos, o nosso problema resume-se a determinar os valores da corrente máxima i_m e do ângulo de fase ϕ .

3.2 ELEMENTOS DE UM CIRCUITO AC

3.2.1 Resistor

Considere um circuito contendo uma fonte AC e um resistor, conforme mostrado na Figura 3.2. Definindo V_R como a diferença de potencial entre os terminais do resistor,

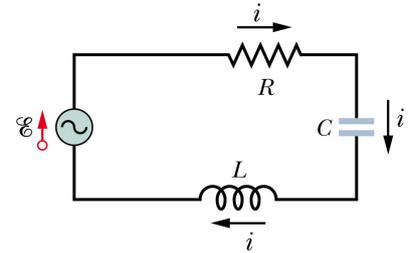


Figura 3.1 – Um circuito de malhas simples, com um resistor, um indutor e um capacitor. O gerador é uma fonte de fem alternada que estabelece uma corrente alternada no circuito.

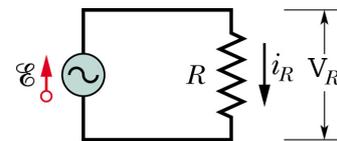


Figura 3.2 – Um resistor em um circuito de AC.

temos

$$(3.4) \quad V_R = iR = i_m R \sin(\omega t - \phi).$$

Comparando as equações 3.3 e 3.4 vemos que V_R e i estão em *fase*: elas alcançam os valores máximos ao mesmo tempo.

3.2.2 Indutor

A Figura 3.3 mostra um circuito contendo apenas um indutor e uma fonte de AC. A diferença de potencial que atravessa o indutor é dada por

$$(3.5) \quad V_L = L \frac{di}{dt} = Li_m \omega \cos(\omega t - \phi).$$

Usando a identidade trigonométrica $\cos \theta = \sin(\theta + \pi/2)$, obtemos

$$(3.6) \quad V_L = Li_m \omega \sin(\omega t - \phi + \pi/2).$$

Comparando as equações 3.3 e 3.6 vemos que V_L e i *não* estão em *fase*: V_L atinge o valor máximo antes de i , ou seja, i está atrasada em relação a V_L .

É conveniente definir uma nova quantidade, a *reatância indutiva* X_L :

$$(3.7) \quad X_L = \omega L,$$

de forma que podemos escrever a equação 3.6 como

$$(3.8) \quad V_L = i_m X_L \sin(\omega t - \phi + \pi/2).$$

A unidade SI para X_L é a mesma da resistência, o ohm, (Ω). O valor máximo para V_L é

$$(3.9) \quad V_L^{\max} = i_m X_L.$$

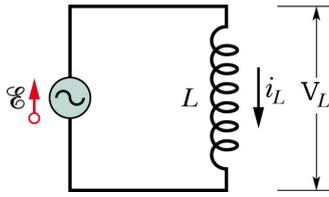


Figura 3.3 – Um indutor em um circuito de AC.

3.2.3 Capacitor

A Figura 3.4 mostra um circuito contendo apenas um capacitor e uma fonte de AC. A diferença de potencial V_C entre os terminais do capacitor é dada por

$$(3.10) \quad V_C = \frac{q}{C} = \frac{\int idt}{C}.$$

Integrando a corrente i dada pela equação 3.3, encontramos

$$(3.11) \quad \begin{aligned} V_C &= -\frac{i_m}{\omega C} \cos(\omega t - \phi) \\ &= \frac{i_m}{\omega C} \sin(\omega t - \phi - \pi/2), \end{aligned}$$

onde utilizamos a identidade trigonométrica $\cos \theta = -\sin(\theta - \pi/2)$.

Comparando as equações 3.3 e 3.11 vemos que V_C e i também *não* estão em fase: V_C atinge o valor máximo depois de i , ou seja, i está adiantada em relação a V_C .

Em analogia com a reatância indutiva, é conveniente definir a *reatância capacitiva* X_C :

$$(3.12) \quad X_C = \frac{1}{\omega C},$$

tal que podemos reescrever V_C como

$$(3.13) \quad V_C = i_m X_C \sin(\omega t - \phi - \pi/2).$$

A unidade de X_C também é o ohm. O valor máximo de V_C é

$$(3.14) \quad V_C^{\max} = i_m X_C.$$

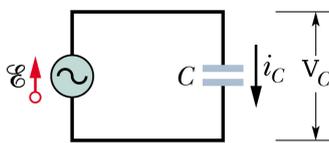


Figura 3.4 – Um capacitor em um circuito de AC.

3.3 CIRCUITO RLC DE MALHA SIMPLES

Após a análise de cada um dos elementos de circuito em separado, agora vamos analisar as características de um circuito de corrente alternada contendo uma fonte de AC, um indutor, um resistor e um capacitor, como o circuito mostrado na Figura 3.1. Usando a segunda lei de Kirchhoff, a lei

das malhas, temos que a voltagem aplicada em um circuito RLC é igual às diferenças de potencial que atravessam cada elemento do circuito, ou seja

$$(3.15) \quad \mathcal{E} = V_R + V_L + V_C.$$

Substituindo os valores de \mathcal{E} , V_R , V_L e V_C na equação acima, obtemos

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_m \sin \omega t &= i_m \sin(\omega t - \phi) \\ &+ i_m X_L \sin(\omega t - \phi + \pi/2) \\ &+ i_m X_C \sin(\omega t - \phi - \pi/2). \end{aligned}$$

Após vários malabarismos trigonométricos podemos reduzir esta equação a

$$(3.17) \quad \mathcal{E}_m \sin \omega t = i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \sin \omega t$$

desde que façamos a escolha

$$(3.18) \quad \tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

A amplitude da corrente pode ser facilmente obtida:

$$(3.19) \quad i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

A quantidade no denominador é chamada *impedância* do circuito RLC:

$$(3.20) \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

de forma que a amplitude da corrente pode ser escrita como

$$(3.21) \quad i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z},$$

que é similar à relação $i = \mathcal{E}/R$ para circuitos resistivos de malha simples onde a fem é constante. A unidade SI da impedância também é o ohm.

Obtivemos então os valores da amplitude da corrente, i_m , e do ângulo de fase, ϕ , para um circuito RLC. Note que a fase não depende da amplitude \mathcal{E}_m da fem aplicada, isto é, se variarmos \mathcal{E}_m variaremos i_m , mas não ϕ . A corrente i_m é máxima quando a impedância atinge o seu valor máximo R , que ocorre quando $X_L = X_C$, ou

$$(3.22) \quad \omega L = \frac{1}{\omega C},$$

de forma que

$$(3.23) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

que é a condição de *ressonância*.

3.4 POTÊNCIA EM CIRCUITOS AC

No circuito RLC da Figura 3.1 a fonte de energia é o gerador de corrente alternada. Parte da energia fornecida pela gerador é armazenada no campo elétrico do capacitor, parte é armazenada no campo magnético do indutor e parte é dissipada como energia térmica no resistor. No regime estacionário, isto é, depois de transcorrido um tempo suficiente para que o circuito se estabilize, a energia média armazenada no capacitor e no indutor juntos permanece constante. A transferência da energia se dá então da fonte para o resistor, onde a energia eletromagnética é convertida em energia térmica.

Para um resistor, a potência ou taxa de dissipação de energia por efeito Joule pode ser escrita como

$$(3.24) \quad P = i^2 R = i_m^2 R \sin^2(\omega t - \phi).$$

A energia dissipada no resistor apresenta flutuações no tempo, assim como a energia armazenada no capacitor e no indutor. Em muitos casos que envolvem correntes alternadas, não há o interesse em saber como a potência varia no decorrer de cada ciclo; estamos interessados principalmente na *potência média* dissipada durante um ciclo qualquer. A taxa média com a qual a energia é dissipada no resistor é a média no tempo da equação 3.24. Para uma função $f(t)$ qualquer, o *valor médio temporal* é definido por

$$(3.25) \quad \langle f(t) \rangle = \overline{f(t)} \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt',$$

onde T é qualquer número inteiro de ciclos ou períodos. Para funções quadráticas de seno e cosseno, os valores médios são

$$(3.26) \quad \langle \cos^2 \theta \rangle = \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \rangle,$$

ou seja

$$(3.27) \quad \langle \cos^2 \theta \rangle = \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o valor médio da potência dada na equação 3.24 será simplesmente:

$$(3.28) \quad \overline{P} = i_m^2 R \langle \sin^2(\omega t - \phi) \rangle = \frac{i_m^2 R}{2} = \left(\frac{i_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R.$$

A grandeza $i_m / \sqrt{2}$ é chamada de **valor médio quadrático** ou **valor rms** (do inglês *root mean square*) da corrente i_m :

$$(3.29) \quad i_{\text{rms}} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}.$$

Portanto, podemos escrever a potência média como:

$$(3.30) \quad \overline{P} = i_{\text{rms}}^2 R.$$

Note que esta equação possui a mesma forma da potência dissipada por um resistor num circuito de corrente contínua, $P = i^2 R$. Isso significa que usando a corrente rms podemos

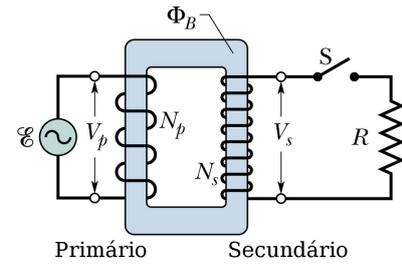


Figura 3.5 – Um transformador ideal, formado por duas bobinas enroladas em um núcleo de ferro, ligado a uma fonte e um resistor R . Um gerador de corrente alternada produz uma corrente no enrolamento da esquerda (o primário). O enrolamento da direita (o secundário) é ligado à carga resistiva quando a chave S é fechada.

calcular a taxa média de dissipação de energia em circuitos de corrente alternada como se estivéssemos trabalhando com um circuito de corrente contínua.

Podemos também definir valores rms para a voltagem ou tensão e para a força eletromotriz:

$$(3.31) \quad V_{\text{rms}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}}.$$

Portanto, a corrente rms também pode ser definida por:

$$(3.32) \quad i_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}}{Z},$$

e a potência média como

$$(3.33) \quad \overline{P} = \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}}{Z} i_{\text{rms}} R = \mathcal{E}_{\text{rms}} i_{\text{rms}} \frac{R}{Z}.$$

O termo R/Z é o cosseno da constante de fase ϕ , de forma que a forma usual para a potência média é

$$(3.34) \quad \overline{P} = \mathcal{E}_{\text{rms}} i_{\text{rms}} \cos \phi,$$

onde o termo $\cos \phi$ é chamado **fator de potência**. Os valores rms também são chamados **valores eficazes**.

3.5 O TRANSFORMADOR

Um transformador é um dispositivo usado para aumentar ou para reduzir a tensão ou voltagem em um circuito sem perda apreciável de energia. A Figura 3.5 mostra um transformador simples que consiste em duas bobinas em torno de um núcleo comum de ferro. A bobina com a potência de entrada é chamada de primário e a outra bobina é chamada de secundário. Cada bobina de um transformador pode ser usada como primário ou secundário. O transformador opera baseado no princípio que uma corrente alternada em um circuito induz uma fem alternada em um circuito nas proximidades devido à indutância mútua entre os dois circuitos.

Considere o transformador da Figura 3.5. O enrolamento primário, com N_p espiras, está ligado a um gerador de

corrente alternada cuja fem é dada por

$$(3.35) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t.$$

O enrolamento secundário, com N_s espiras, está ligado a uma resistência de carga R , mas não há corrente no circuito se a chave S estiver aberta. Como este é um transformador ideal, a resistência das duas bobinas é desprezível. Nestas condições, o enrolamento primário é uma indutância pura, como a mostrada na Figura 3.3. Portanto, a corrente no primário, que é chamada *corrente magnetizante* i_{mag} , está atrasada em relação à diferença de potencial V_p do primário de 90° . Logo, o fator de potência ($= \cos \phi$) é zero, ou seja, nenhuma potência é fornecida pelo gerador ao transformador.

A corrente alternada i_{mag} do primário produz um fluxo magnético alternado Φ_B no núcleo de ferro. O núcleo reforça este fluxo e o transfere para o enrolamento secundário do transformador sem perdas. Como Φ_B varia com o tempo, induz uma força eletromotriz $\mathcal{E}_{\text{espira}} = -d\Phi_B/dt$ em cada espira do primário e do secundário, de forma que:

$$(3.36) \quad \mathcal{E}_{\text{espira,primario}} = \mathcal{E}_{\text{espira,secundario}}.$$

Para cada um dos enrolamentos, a fem por espira é igual à diferença de potencial dividida pelo número de espiras do enrolamento. Logo, podemos escrever:

$$(3.37) \quad \mathcal{E}_{\text{espira}} = \frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s}$$

ou

$$(3.38) \quad V_s = V_p \frac{N_s}{N_p}.$$

Se $N_s > N_p$, o transformador é chamado de *transformador elevador ou amplificador de tensão*, já que, nesse caso, a tensão V_s no secundário é maior que a tensão V_p no primário. Se $N_s < N_p$, o transformador recebe o nome de *transformador abaixador ou atenuador de tensão*.

Até agora, consideramos a chave S do circuito da Figura 3.5 aberto. Se fechamos a chave, várias coisas acontecem:

1. Uma corrente alternada i_s aparece no circuito secundário e uma potência $i_s^2 R$ passa a ser dissipada;
2. Essa corrente produz um fluxo magnético alternado no núcleo de ferro; o fluxo induz uma fem no primário que se opõe à fem do gerador;
3. V_p não pode variar pois deve ser igual à fem do gerador.
4. Logo, para manter a tensão V_p diante da fem oposta induzida pelo secundário, uma nova corrente alternada i_p é gerada no primário, com seu módulo e fase justamente necessários para anular a fem induzida pela corrente do secundário i_s .

Partindo do princípio da conservação de energia, para um transformador ideal podemos escrever

$$(3.39) \quad i_p V_p = i_s V_s.$$

Portanto, usando a equação 3.38, temos

$$(3.40) \quad i_s = i_p \frac{N_p}{N_s},$$

para a lei de transformação entre as correntes. Finalmente, como $i_s = V_s/R$ na presença do resistor, obtemos:

$$(3.41) \quad i_p = \frac{V_p}{(N_p/N_s)^2 R},$$

que nos diz, do ponto de vista do circuito primário, que a resistência equivalente do circuito não é R , mas sim

$$(3.42) \quad R_{eq} = (N_p/N_s)^2 R.$$

A resistência R_{eq} é o valor da resistência “vista” pelo gerador: o gerador produz uma corrente i_p e uma tensão V_p como se estivesse ligado a uma resistência R_{eq} .

O campo magnético produzido por uma corrente elétrica em uma espira nos dá uma dica de por que certos materiais exibem fortes propriedades magnéticas. Tal como num ímã, também podemos associar pólos magnéticos para uma espira de corrente, como mostrado na Figura 4.1. Em geral, qualquer corrente num circuito fechado possui um campo magnético e, portanto, possui um momento de dipolo magnético, incluindo as correntes em circuitos no nível atômico descrito em alguns modelos do átomo.

4.1 OS MOMENTOS MAGNÉTICOS DOS ÁTOMOS

Iniciamos nossa discussão com o modelo clássico do átomo no qual os elétrons movem-se em órbitas circulares em torno de um núcleo muito mais massivo. Neste modelo, um elétron em órbita constitui uma pequena espira de corrente (devido à sua carga em movimento), e o momento de dipolo magnético do elétron está associado com seu movimento orbital. Embora este modelo possua muitas deficiências, conforme veremos ao final do curso, algumas de suas previsões estão em bom acordo com a teoria correta, baseada na física quântica.

No nosso modelo clássico, assumimos que um elétron se move com velocidade constante v numa órbita circular de raio r em torno do núcleo, como mostrado na Figura 4.2. Como o elétron percorre uma distância de $2\pi r$ (a circunferência do círculo) num intervalo de tempo T , sua velocidade orbital é

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

A corrente I associada a este elétron em órbita é sua carga e dividida pelo tempo T . Usando a relação $T = 2\pi/\omega$ e $\omega = v/r$, onde ω é a velocidade angular, temos

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r}.$$

A magnitude do momento de dipolo magnético associado com esta espira de corrente é $\mu = IA$, onde $A = \pi r^2$ é a área coberta pela órbita. Portanto,

$$\mu = IA = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} evr.$$

Como a magnitude do momento angular orbital do elétron é $\ell = m_e v r$, o momento magnético pode ser escrito como

$$\mu = \frac{e}{2m_e} \ell.$$

Este resultado demonstra que o momento magnético do elétron é proporcional ao seu momento angular orbital. Considerando todos os elétrons num átomo, o momento de dipolo magnético total, $\vec{\mu}_L$, em termos vetoriais, é dado por

$$\vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m_e} \vec{L},$$

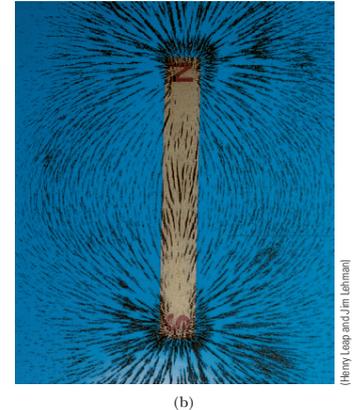
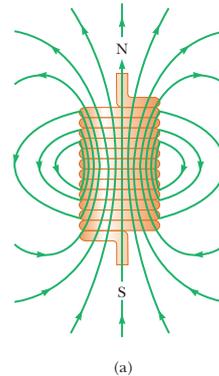


Figura 4.1 – (a) Linhas de campo magnético para um solenóide perfeitamente enrolado de comprimento finito, o qual é percorrido por uma corrente contínua. O campo no interior do solenóide é bastante intenso e praticamente uniforme. Note que as linhas de campo são similares às de uma barra magnética (ímã), o que significa que o solenóide também possui pólos norte e sul. (b) Padrão do campo magnético produzido por uma barra magnética, visualizado com a ajuda de pequenas limalhas de ferro sobre uma folha de papel. ©Serway–Jewett

onde \vec{L} é o momento angular orbital total do átomo ($\vec{L} = \sum \vec{\ell}$). Como os elétrons possuem carga negativa, os vetores $\vec{\mu}$ e \vec{L} apontam em direções contrárias, daí o sinal negativo nesta equação. Além disso, ambos vetores são perpendiculares ao plano da órbita, como indicado na Figura 4.2.

Como todas as substâncias contêm elétrons, podemos nos perguntar por que muitas delas não são magnéticas. A principal razão é que na maioria das substâncias, o momento magnético de um elétron em um átomo se cancela com o momento magnético de outro elétron orbitando na direção oposta. O resultado líquido é que, para a maioria dos materiais, o efeito magnético produzido pelo movimento orbital dos elétrons é nulo ou insignificante.

Experiências realizadas na década de 1920, passando-se feixes de átomos através de campos magnéticos, mostraram que o modelo acima da estrutura de dipolo magnético do átomo não era suficiente para explicar as propriedades observadas. Foi necessário introduzir outra espécie de momento magnético para o elétron, chamado de *momento magnético intrínseco* ou de *spin*. Portanto, além do momento magnético orbital, um elétron (assim como os prótons, nêutrons e outras partículas) possui uma propriedade intrínseca (como a massa) chamada de **spin** que também contribui para seu momento magnético total. Classicamente, o elétron pode ser imaginado como se girasse em torno de seu próprio eixo, como mostra a Figura 4.3, mas devemos tomar muito cuidado com esta interpretação, já que a noção de rotação para uma partícula puntual como o elétron não faz sentido algum. A rotação aplica-se apenas a corpos rígidos, com uma extensão no espaço. O momento angular de spin é na

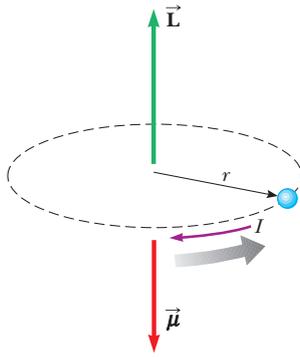


Figura 4.2 – Um elétron movendo-se na direção indicada pela seta numa órbita circular de raio r possui um momento angular \vec{L} em uma direção (para cima) e um momento magnético $\vec{\mu}$ na direção oposta (para baixo). Como o elétron possui carga negativa, a direção da corrente devido ao seu movimento em torno do núcleo é oposta à direção de tal movimento. ©Serway–Jewett

verdade um efeito relativístico, e a interpretação rotacional é apenas utilizada para facilitar a visualização deste efeito.

O momento de dipolo magnético intrínseco total, $\vec{\mu}_S$, de um átomo é definido por

$$\vec{\mu}_S = -\frac{e}{m_e} \vec{S},$$

onde \vec{S} é o spin total dos elétrons no átomo.

As propriedades magnéticas de um material são determinadas pelo momento de dipolo magnético total de seus átomos, obtido pela soma vetorial da parte orbital, $\vec{\mu}_L$, com a parte do spin, $\vec{\mu}_S$. Num átomo complexo contendo muitos elétrons, as somas necessárias para determinar \vec{L} e \vec{S} podem ser muito complicadas. Entretanto, em muitos casos, os elétrons se acoplam aos pares, de tal modo que \vec{L} e \vec{S} se anulam. Materiais compostos desses átomos são virtualmente não-magnéticos, exceto por um efeito induzido, muito fraco, chamado de *diamagnetismo*. Em outros átomos, \vec{L} ou \vec{S} (ou ambos) podem ser não-nulos; esses átomos são responsáveis pelo campo magnético induzido em certos materiais, que é análogo ao campo elétrico induzido num material dielétrico. Tais materiais são chamados *paramagnéticos*. O tipo mais familiar de magnetismo é o *ferromagnetismo*, em que, devido às interações entre os átomos, os efeitos magnéticos persistem no material mesmo quando o campo magnético externo é removido.

4.2 MAGNETIZAÇÃO E INTENSIDADE DO CAMPO MAGNÉTICO

O estado magnético de uma substância é descrito por uma quantidade chamada vetor de magnetização \vec{M} . A magnitude deste vetor é definida como o momento magnético por unidade de volume da substância. Como esperado, o campo magnético total \vec{B} num ponto no interior da substância depende tanto do campo aplicado sobre ela, \vec{B}_0 , como da magnetização da substância.

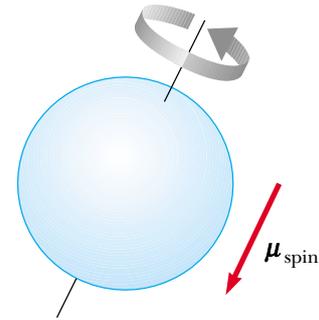


Figura 4.3 – Modelo clássico de um elétron girando (spin). Podemos adotar este modelo apenas para recordar que os elétrons possuem um momento angular intrínseco. ©Serway–Jewett

Considere uma região na qual o campo magnético \vec{B}_0 é produzido por um condutor com corrente. Se preenchermos esta região com uma substância magnética, o campo magnético total na região será $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M$, onde \vec{B}_M é o campo magnético produzido pela substância magnética.

Vamos agora determinar a relação entre \vec{B}_M e \vec{M} . Imagine que o campo \vec{B}_M é criado por um solenóide ao invés de um material magnético. Então, $B_M = \mu_0 n I$, onde I é a corrente neste solenóide imaginário e n é o número de espiras por unidade de comprimento. Manipulando esta expressão, obtemos

$$B_M = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 \frac{NIA}{\ell A},$$

onde N é o número de espiras no comprimento ℓ , e multiplicamos numerador e denominador por A , a seção de área do solenóide. A quantidade no numerador, NIA , é facilmente reconhecida como o momento de dipolo magnético total de todas as espiras no solenóide de comprimento ℓ e o denominador ℓA é o volume do solenóide, ou seja:

$$B_M = \mu_0 \frac{\mu}{V}.$$

A razão entre o momento de dipolo magnético total e o volume é justamente o que definimos como magnetização no caso quando o campo é devido a um material magnético em vez de um solenóide. Assim, podemos expressar a contribuição \vec{B}_M para o campo magnético total em termos do vetor magnetização da substância como

$$\vec{B}_M = \mu_0 \vec{M}.$$

Quando uma substância é colocada num campo magnético, o campo total na região será expresso como:

$$(4.1) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}.$$

Quando analisamos campos magnéticos originados pela magnetização, é conveniente introduzir uma quantidade chamada de intensidade do campo magnético, \vec{H} , dentro da substância. A intensidade do campo magnético está relacionada com o campo magnético produzido pela condução de corrente elétrica em um fio. Para enfatizar a diferença entre a intensidade de campo \vec{H} e o campo \vec{B} , este último é chamado

de densidade de fluxo magnético ou indução magnética. O vetor intensidade do campo magnético é o momento magnético por unidade de volume devido a correntes; assim, ele é similar ao vetor \vec{M} e possui as mesmas unidades.

Reconhecendo a similaridade entre \vec{M} e \vec{H} , podemos definir \vec{H} como

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}.$$

Assim, a Eq. 4.1 pode ser escrita como

$$(4.2) \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}).$$

As unidades SI de \vec{H} e \vec{M} são o ampère por metro (A/m).

Para entender melhor estas expressões, considere a região interna de um solenóide que conduz uma corrente I . Se esta região está no vácuo, $\vec{M} = 0$ (pois nenhum material magnético está presente), o campo magnético total é aquele produzido pela corrente e $\vec{B} = \vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}$. Como $B_0 = \mu_0 nI$ na região do solenóide, onde n é o número de espiras por unidade de comprimento, temos

$$H = B_0/\mu_0 = \mu_0 nI/\mu_0 = nI.$$

Neste caso, o campo magnético na região interna do solenóide é devido apenas à corrente no fio que a circunda.

Se agora o enrolamento do solenóide é feito sobre algum material e a corrente I é mantida constante, \vec{H} na região interna do solenóide permanece o mesmo (pois ele depende apenas da corrente) e possui o valor nI . O campo magnético total \vec{B} , entretanto, é diferente daquele obtido para o solenóide no vácuo. Parte de \vec{B} é devido ao termo $\mu_0\vec{H}$, associado com a corrente, e parte surge do termo $\mu_0\vec{M}$ devido à magnetização da substância da qual a base do solenóide é feita.

4.3 CLASSIFICAÇÃO DAS SUBSTÂNCIAS MAGNÉTICAS

As substâncias podem ser classificadas em três categorias, dependendo de suas propriedades magnéticas. Materiais **paramagnéticos** e **ferromagnéticos** são aqueles compostos de átomos que possuem momentos magnéticos permanentes. Materiais **diamagnéticos** são aqueles feitos de átomos que não possuem momentos magnéticos permanentes.

Para substâncias paramagnéticas e diamagnéticas, o vetor magnetização \vec{M} é proporcional à intensidade do campo magnético \vec{H} . Quando colocamos estas substâncias em um campo magnético externo, podemos escrever

$$(4.3) \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

onde χ_m é um fator adimensional chamado de **susceptibilidade magnética**. Podemos considerar este fator como sendo uma medida de quão fácil um material é magnetizado. Para substâncias paramagnéticas, χ_m é positivo e \vec{M} possui a mesma direção de \vec{H} . Para substâncias diamagnéticas, χ_m é

negativo e \vec{M} e \vec{H} são opostos.

Substituindo a Eq. 4.3 para \vec{M} na Eq. 4.2, obtemos

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$$

$$(4.4) \quad \vec{B} = \mu_m \vec{H}$$

onde a constante μ_m é chamada de **permeabilidade magnética** da substância e é relacionada com a susceptibilidade por

$$\mu_m = \mu_0(1 + \chi_m).$$

As substâncias podem ser classificadas em termos de como sua permeabilidade magnética μ_m se compara com μ_0 , a permeabilidade magnética do vácuo, como segue:

Paramagnéticas: $\mu_m > \mu_0$

Diamagnéticas: $\mu_m < \mu_0$

Como χ_m é muito pequena para substâncias paramagnéticas e diamagnéticas, μ_m é aproximadamente igual a μ_0 para tais substâncias. Para substâncias ferromagnéticas, no entanto, μ_m é tipicamente milhares de vezes maior que μ_0 (significando que χ_m é muito grande para substâncias ferromagnéticas).

Apesar da Eq. 4.4 nos dar uma relação simples entre \vec{B} e \vec{H} , devemos interpretá-la com cuidado quando tratamos de substâncias ferromagnéticas. Para materiais ferromagnéticos, \vec{M} não é uma função linear de \vec{H} (a Eq. 4.3 não é válida para estas substâncias), já que μ_m não é mais uma constante.

Diamagnetismo

O diamagnetismo está associado aos momentos magnéticos orbitais dos elétrons nos átomos ou moléculas que constituem a substância em questão. Por isso, está presente em todas as substâncias embora, na maioria, com uma intensidade tão pequena que sua presença é mascarada por outros comportamentos. Nos supercondutores, parece que o diamagnetismo é forte o suficiente para que o campo magnético resultante no interior da amostra seja nulo. Ao aplicar um campo magnético a uma substância qualquer, cada elétron que se move nos átomos ou moléculas fica sujeito a uma força adicional que provoca uma perturbação no seu movimento, equivalente a uma velocidade adicional e, portanto, uma mudança no seu momento magnético orbital.

Paramagnetismo

Átomos ou moléculas com camadas atômicas incompletas, como no caso dos elementos de transição, das terras raras e dos actinídeos, têm momentos magnéticos permanentes devido aos momentos magnéticos intrínsecos (associados aos spins) dos elétrons dessas camadas. As substâncias compostas de tais átomos ou moléculas são paramagnéticas. A presença de um campo magnético externo produz um torque que tende a alinhar os momentos magnéticos na mesma

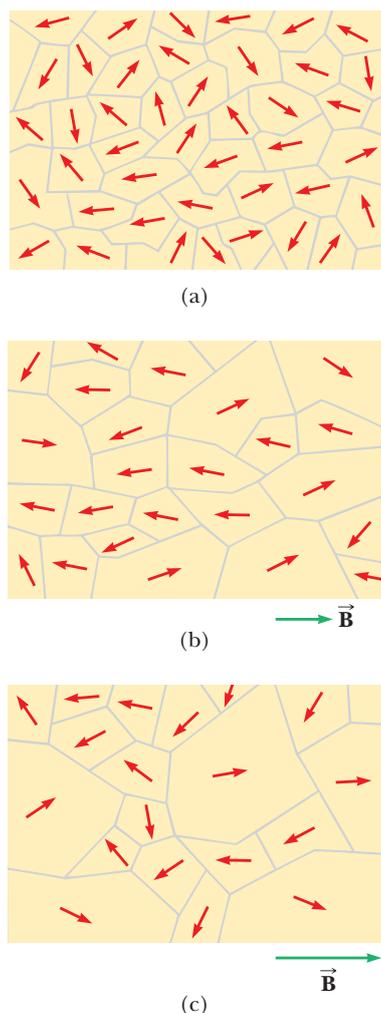


Figura 4.4 – (a) Orientações aleatórias dos dipolos magnéticos atômicos nos domínios de uma substância não-magnetizada. (b) Quando um campo externo B_0 é aplicado, os domínios com componentes do momento magnético na mesma direção de B_0 ficam maiores, dando à amostra uma magnetização líquida. (c) Quando o campo externo é ainda mais intenso, os domínios com vetores do momento magnético que não estão alinhados com o campo externo ficam muito menores. ©Serway–Jewett

direção do campo, causando o aparecimento de uma certa magnetização. Nos metais, o paramagnetismo é também devido a um alinhamento dos momentos magnéticos associado aos spins dos elétrons de condução. O alinhamento não é perfeito devido às colisões entre os átomos ou moléculas, se a substância está na fase gasosa, ou devido às vibrações microscópicas associadas à energia interna, se está na fase sólida. A substância adquire, então, uma magnetização, quando colocada num campo magnético externo, muito menor do que a máxima possível. Portanto, a substância é atraída pelo ímã que cria o campo com uma pequena força.

Ferromagnetismo

As substâncias ferromagnéticas têm uma magnetização permanente que surge da tendência natural de alinhamento dos momentos magnéticos permanentes de seus átomos ou

moléculas, tendência essa fruto de suas interações mútuas. O resultado dessas interações é um alinhamento perfeito dos momentos magnéticos em regiões chamadas domínios, cujas dimensões vão de 10 a 0,001 milímetros cúbicos. Como a direção de alinhamento é diferente de um domínio para outro (Figura 4.4), a magnetização da substância pode ser nula ou muito pequena. Isso acontece, por exemplo, com um pedaço de ferro não magnetizado. Num campo magnético externo ocorre o aumento de tamanho dos domínios favoravelmente orientados às custas dos demais e o desvio angular dos momentos magnéticos de cada domínio, tendendo a um melhor alinhamento com o campo externo. O resultado final é uma grande magnetização e a substância transforma-se num ímã. Por outro lado, devido ao efeito desalinhador das vibrações microscópicas associadas à energia interna, para cada substância ferromagnética existe uma temperatura, chamada temperatura de Curie, acima da qual a substância se torna paramagnética. À temperatura ambiente são ferromagnéticos o ferro, o níquel, o cobalto e o gadolínio, com temperaturas de Curie de 770 °C, 365 °C, 1075 °C e 15 °C, respectivamente.

Neste capítulo apresentamos as quatro equações que são consideradas como a base de todos os fenômenos elétricos e magnéticos. Estas equações, desenvolvidas por James Clerk Maxwell (1831–1879), são tão fundamentais para o Eletromagnetismo como as leis de Newton são para a Mecânica.

As equações de Maxwell representam as leis que regem a eletricidade e o magnetismo, mas elas também possuem uma importante consequência: a previsão da existência das ondas eletromagnéticas.

Até agora no curso apresentamos as duas equações de Maxwell para o campo elétrico. Neste capítulo completaremos o conjunto de equações básicas do eletromagnetismo, introduzindo a lei de Gauss para o campo magnético e uma generalização da lei de Ampère, que completam as quatro equações de Maxwell para o eletromagnetismo.

5.1 LEI DE GAUSS PARA O MAGNETISMO

Conforme vimos no capítulo anterior, dado um campo magnético \vec{B} o fluxo magnético Φ_B através de uma superfície qualquer é definido como

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

onde a integral é sobre a área de uma superfície aberta ou fechada. O fluxo magnético através de uma superfície gaussiana fechada é escrito como

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

No caso do campo elétrico, vimos que o fluxo elétrico através de uma superfície fechada é igual à carga líquida total q no interior da superfície, dividida por ϵ_0 :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Esta é a chamada lei de Gauss para a eletricidade.

De forma similar, podemos escrever uma relação para o fluxo magnético. Porém, conforme vimos no Capítulo 8, nunca foram observados pólos magnéticos isolados (monopolos magnéticos), que seriam o equivalente magnético da carga elétrica. Desse modo, a lei de Gauss para o magnetismo é

$$(5.1) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0.$$

Em termos das linhas do campo magnético, esta relação nos diz que o número de linhas que saem do volume limitado pela superfície fechada é igual ao número de linhas que entram no volume (veja a Figura 5.1).

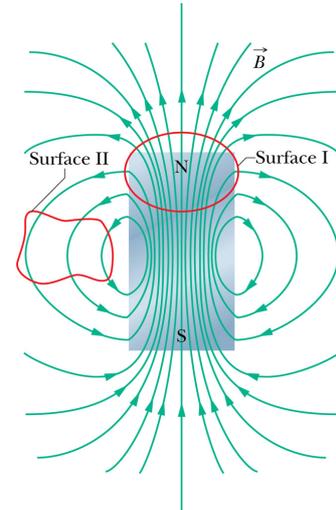


Figura 5.1 – Representação das linhas de campo do campo magnético \vec{B} de um ímã em forma de barra. As curvas vermelhas representam seções retas de superfícies gaussianas tridimensionais. Em todos os casos $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$. ©Halliday

A lei de Gauss para o campo magnético é um modo formal de afirmar que os monopolos magnéticos não existem (até onde sabemos). Assim, a estrutura magnética mais simples que pode existir é o **dipolo magnético**.

Monopolos magnéticos

Mostramos no Capítulo 3 que a lei de Gauss para campos elétricos é equivalente à lei de Coulomb, que é baseada na observação experimental da força entre as cargas puntiformes. A lei de Gauss para o magnetismo também se baseia numa observação experimental, o fracasso das tentativas de observar pólos magnéticos isolados, tais como um único pólo norte ou sul.

A existência de cargas magnéticas isoladas foi proposta em 1931 pelo físico teórico Paul Dirac, com base em argumentos da mecânica quântica e de simetria. Foi Dirac quem denominou essas cargas de *monopolos magnéticos* e deduziu algumas das propriedades básicas esperadas para elas, incluindo o módulo da “carga magnética” (análoga à carga eletrônica e). Após a teoria de Dirac foram realizadas experiências tentando isolar os monopolos magnéticos usando grandes aceleradores de partículas e examinando matéria terrestre e extraterrestre. Nenhuma dessas pesquisas iniciais revelou qualquer evidência a favor da existência de monopolos magnéticos.

A procura do monopolo magnético continua a ser feita, mas uma evidência convincente de sua existência ainda não foi obtida. Por enquanto, vamos supor que ou os monopolos magnéticos não existem e assim a equação Eq. 5.1 é exata e universalmente válida, ou, no caso deles existirem, a Eq. 5.1 é uma aproximação bastante precisa dada à raridade

de encontrá-los na natureza. A lei de Gauss para o magnetismo possui então um papel fundamental na descrição do comportamento dos campos magnéticos na natureza e é incluída como uma das quatro equações de Maxwell do eletromagnetismo.

5.2 CORRENTE DE DESLOCAMENTO E A LEI DE AMPÈRE GENERALIZADA

Cargas em movimento, ou correntes, produzem campos magnéticos. Quando um condutor transportando corrente tem uma certa simetria, podemos calcular o campo magnético usando a lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I,$$

onde a integral de linha é calculada sobre qualquer trajetória fechada através da qual passa a corrente de condução definida por $I = dq/dt$. A lei de Ampère nesta forma é válida somente se a corrente de condução for contínua no espaço. Maxwell reconheceu esta limitação e modificou a lei de Ampère para incluir todas as situações possíveis.

Por exemplo, considere um capacitor que está sendo carregado como na Figura 5.2. Quando existe corrente de condução nos fios, a carga nas placas varia com o tempo, mas não existe nenhuma corrente de condução entre as placas. Considere as duas superfícies S_1 (um círculo) e S_2 (um parabolóide passando entre as placas) limitadas pela mesma trajetória P na Figura 5.2. Pela lei de Ampère, a integral de $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ ao longo dessa trajetória deve ser igual a $\mu_0 I$, onde I é a corrente total através de qualquer superfície limitada pela trajetória P . Portanto, para a superfície S_1 , a integral é igual a $\mu_0 I$ pois a corrente I atravessa S_1 .

Para a superfície S_2 , porém, o resultado será nulo pois não há corrente atravessando a superfície. Assim, a lei de Ampère não pode ser aplicada quando a corrente possui uma descontinuidade. Maxwell resolveu este problema adicionando um termo correspondente a uma **corrente de deslocamento**, I_d na lei de Ampère, definida como

$$I_d \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

onde $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ é o fluxo do campo elétrico.

Dessa maneira, quando um capacitor está sendo carregado, a variação do campo elétrico entre as placas pode ser considerado como equivalente a uma corrente que atua como uma continuação da corrente de condução no fio. Com esse novo conceito de corrente de deslocamento podemos escrever a forma generalizada da lei de Ampère (ou lei de Ampère-Maxwell)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Podemos entender melhor a corrente de deslocamento através da Figura 5.3. O fluxo elétrico através de S_2 é $\Phi_E =$

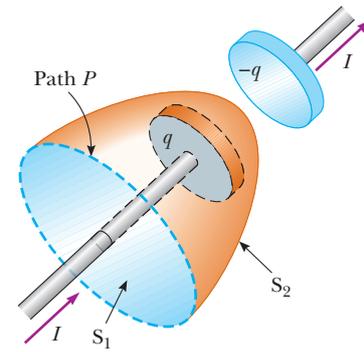


Figura 5.2 – As superfícies S_1 e S_2 são limitadas pela mesma trajetória P . A corrente de condução no fio passa apenas através da superfície plana S_1 . Isso leva a uma contradição na lei de Ampère que é resolvida apenas caso se postule uma corrente de deslocamento através de S_2 . ©Serway–Jewett

$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$, onde A é a área das placas do capacitor e E é o módulo do campo elétrico uniforme entre as placas. Se q é a carga nas placas em qualquer instante, então pela lei de Gauss $E = q/\epsilon_0 A$. Dessa forma, o fluxo elétrico é

$$\Phi_E = EA = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Assim, a corrente de deslocamento através de S_2 é:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dq}{dt}.$$

Ou seja, a corrente de deslocamento através de S_2 é exatamente igual à corrente I no fio condutor.

A introdução da corrente de deslocamento na lei de Ampère mostra que **campos magnéticos são produzidos tanto por correntes de condução em fios condutores quanto por campos elétricos variáveis**. Esta foi uma das principais contribuições de Maxwell para o avanço de nossa compreensão do eletromagnetismo.

Cabe ressaltar que existe ainda uma terceira maneira de gerar campos magnéticos: o uso de materiais magnéticos. A contribuição dos materiais magnéticos pode ser levada em conta adicionando-se um terceiro termo na lei de Ampère, $\mu_0 I_M$, onde I_M é chamada de *corrente de magnetização*.

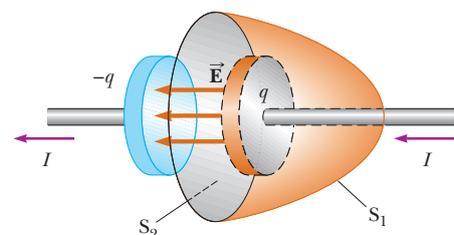


Figura 5.3 – Como existe apenas nos fios, a corrente $I = dq/dt$ atravessa a superfície curva S_1 , mas não a superfície plana S_2 . Apenas a corrente de deslocamento I_d atravessa S_2 . As duas correntes devem ser iguais para que haja continuidade. ©Serway–Jewett

5.3 EQUAÇÕES DE MAXWELL

As relações matemáticas que descrevem todos os fenômenos elétricos e magnéticos são denominadas **equações de Maxwell**. Para simplificar, apresentamos as equações para o vácuo, isto é, na ausência de materiais dielétricos ou magnéticos.

Lei de Gauss para o campo elétrico

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Esta equação estabelece que o fluxo elétrico total através de qualquer superfície fechada é igual à carga líquida dentro dessa superfície dividida por ϵ_0 . Essa lei descreve como as cargas criam campos elétricos, já que as linhas de campo elétrico se originam em cargas positivas e terminam em cargas negativas.

Lei de Gauss para o campo magnético

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

O fluxo magnético resultante através de uma superfície fechada é nulo. Isto é, o número de linhas de campo magnético entrando em um volume fechado tem de ser igual ao número de linhas que deixam esse volume. Esta equação está relacionado ao fato de que monopolos magnéticos nunca foram observados na natureza.

Lei da indução de Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Esta relação descreve como um campo magnético variável cria um campo elétrico. A integral de linha do campo elétrico em torno de qualquer trajetória fechada (que é igual à fem) é igual à taxa de variação do fluxo magnético através de qualquer superfície limitada por essa trajetória.

Lei de Ampère-Maxwell

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

A forma generalizada para a lei de Ampère descreve como uma corrente elétrica ou um campo elétrico variável criam um campo magnético. A integral de linha do campo magnético em torno de qualquer trajetória fechada é determinada pela corrente resultante e pela taxa de variação do fluxo elétrico através de qualquer superfície limitada por essa trajetória.

Em sua teoria unificada do eletromagnetismo, Maxwell demonstrou que campos elétricos e magnéticos dependentes do tempo satisfazem uma equação de onda. O resultado mais significativo dessa teoria é a predição da existência de ondas eletromagnéticas.

As equações de Maxwell prevêm que uma onda eletromagnética consiste de campos elétricos e magnéticos oscilantes. Os campos variáveis criam um ao outro para manter a propagação da onda: um campo elétrico variável induz um campo magnético também variável, que por sua vez induz um campo elétrico, e assim por diante.

Neste capítulo, vamos deduzir as equações das ondas eletromagnéticas e discutir o espectro eletromagnético. Também obteremos expressões para a energia transportada pelas ondas eletromagnéticas e polarização.

6.1 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS PLANAS

As propriedades das ondas eletromagnéticas podem ser deduzidas a partir das equações de Maxwell, conforme demonstraremos aqui para o caso mais simples de uma onda se propagando no espaço e no tempo.

Vamos considerar uma onda eletromagnética que viaja na direção x (a direção de propagação). Nesta onda, o campo elétrico \vec{E} está na direção y e o campo magnético \vec{B} está na direção z , como mostrado na Figura 6.1. Ondas deste tipo, nas quais os campos elétricos e magnéticos são paralelos a um par de eixos perpendiculares entre si, são referidas por **ondas linearmente polarizadas**. Além disso, assumimos que em qualquer ponto do espaço, as magnitudes E e B dos campos dependem apenas da posição x e do tempo t , ou seja:

$$E = E(x, t) \quad \text{e} \quad B = B(x, t)$$

Como mostra a Figura 6.1, uma onda eletromagnética pode ser representada por um *raio* (uma reta orientada que mostra a direção de propagação da onda), por *frentes de onda* (superfícies imaginárias nas quais o campo elétrico tem o mesmo módulo) ou das duas formas. As duas frentes de onda que aparecem na Figura 6.1a estão separadas por um comprimento de onda λ ($= 2\pi/k$). (Ondas que viajam aproximadamente na mesma direção formam um *feixe*, como o feixe de um laser ou de uma lanterna.)

Podemos também representar a onda como na Figura 6.1b, que mostra os vetores campo elétrico e campo magnético em um “instantâneo” da onda tomado em um certo momento. As curvas que passam pelas extremidades dos vetores representam as oscilações dos campos elétricos e magnéticos. As componentes da onda \vec{E} e \vec{B} estão em fase, são perpendiculares entre si e são perpendiculares à direção de propagação.

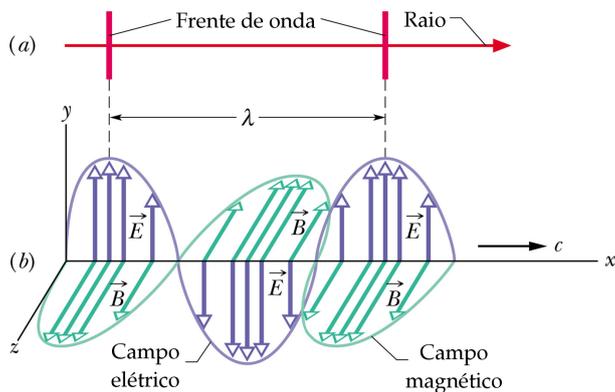


Figura 6.1 – (a) Uma onda eletromagnética representada por um raio e duas frentes de onda; as frentes de onda estão separadas por um comprimento de onda λ . (b) A mesma onda, representada por um “instantâneo” do campo elétrico \vec{E} e do campo magnético \vec{B} em vários pontos sobre o eixo x , pelos quais a onda passa com velocidade c . ©Halliday

6.2 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DE UMA ONDA ELETROMAGNÉTICA

Vamos agora determinar as expressões matemáticas que mostram a propagação de uma onda eletromagnética pela indução recíproca de campos elétricos e magnéticos. Para simplificar o problema, vamos considerar uma onda se propagando no vácuo, onde não há cargas ou correntes de condução ($q = 0$ e $I = 0$), com as mesmas direções dos campos e da propagação mostradas na Figura 6.1.

Considere um pequeno retângulo no plano do campo elétrico como mostrado na Figura 6.2. Este retângulo tem uma certa altura Δy e uma largura infinitesimal dx . A variação do fluxo magnético através desta espira retangular está relacionada ao campo elétrico ao longo da espira pela lei de Faraday. Para o caso mostrado, o campo magnético B através da espira está diminuindo com o tempo (a onda move-se para a direita). Assim, o campo elétrico deve estar na direção que se opõe a esta variação, o que significa que E deve ser maior no lado direito do que no lado esquerdo da espira, conforme mostra a figura, de forma que ele produziria uma corrente elétrica no sentido anti-horário cujo campo magnético atuaria no sentido de se opor à variação de Φ_B . Vamos agora aplicar a lei de Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

ao retângulo de altura Δy e largura dx mostrado na Figura 6.2. Resolvendo a integral $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$, notamos que nos lados horizontais do retângulo, \vec{E} é perpendicular a $d\vec{s}$, de forma que $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. Para os lados verticais, consideramos E o campo elétrico ao longo do lado esquerdo e $E+dE$ o campo para o lado direito. Assim, percorrendo a espira retangular no

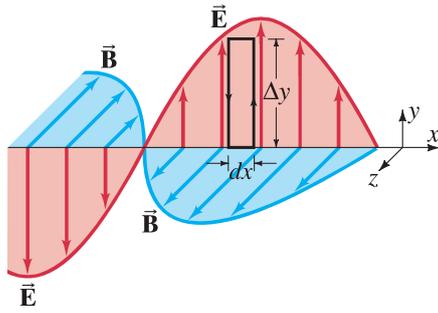


Figura 6.2 – Aplicando a lei de Faraday para a espira retangular $(\Delta y)(dx)$. ©Giancoli

sentido anti-horário, temos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E + dE)\Delta y - E\Delta y = dE\Delta y.$$

Para o lado direito da lei de Faraday, a variação do fluxo magnético através da espira é

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt} dx \Delta y,$$

já que a área da espira, $dx\Delta y$, não varia. Assim, a lei de Faraday nos diz que

$$dE\Delta y = -\frac{dB}{dt} dx \Delta y$$

ou

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}.$$

Na verdade, ambas funções E e B são funções de x e t . Portanto, devemos usar derivadas parciais para reescrever a relação acima:

$$(6.1) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

onde $\partial E/\partial x$ é a derivada de E em relação a x mantendo t constante, e $\partial B/\partial t$ é a derivada de B em relação a t fazendo x constante.

Podemos obter outra importante relação entre E e B considerando agora a espira retangular no plano de \vec{B} , com comprimento Δz e largura dx , conforme mostrado na Figura 6.3. Para esta espira, vamos aplicar a lei de Ampère-Maxwell

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

onde tomamos $I = 0$ já que assumimos uma onda propagando-se no vazio. Para os lados horizontais da espira $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ pois \vec{B} e $d\vec{s}$ são perpendiculares. Para os lados verticais, seja B o campo magnético para o lado esquerdo e $B + dB$ o campo para o lado direito. Novamente, integrando no sentido anti-horário, temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B\Delta z - (B + dB)\Delta z = -dB\Delta z.$$

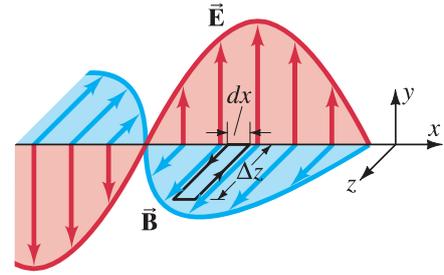


Figura 6.3 – Aplicando a lei de Ampère-Maxwell para a espira retangular $(\Delta z)(dx)$. ©Giancoli

O lado direito da lei de Ampère-Maxwell é

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} dx \Delta z.$$

Igualando estas duas expressões, obtemos

$$-dB\Delta z = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} dx \Delta z$$

ou

$$(6.2) \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

onde novamente usamos derivadas parciais para substituir dB/dx e dE/dt .

As equações 6.1 e 6.2 mostram que campos variáveis criam um ao outro para manter a propagação da onda: um campo elétrico variável induz um campo magnético também variável, que por sua vez induz um campo elétrico, e assim por diante. O efeito é auto-sustentado, ou seja, os campos se propagam acoplados.

Diferenciando a Eq. 6.1 em relação a x e usando o resultado da Eq. 6.2, temos:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

$$(6.3) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Da mesma forma, derivando a Eq. 6.2 em relação a x e combinando com a Eq. 6.1, temos:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right)$$

$$(6.4) \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}.$$

As equações 6.3 e 6.4 representam ondas eletromagnéticas progressivas que se deslocam com uma velocidade c cujo

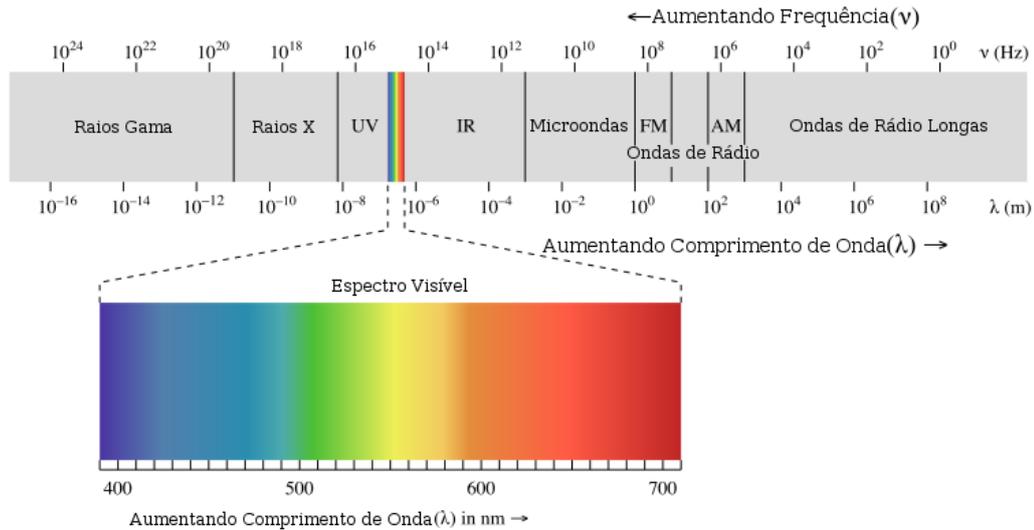


Figura 6.4 – O espectro eletromagnético.

valor é

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}},$$

onde $c = 2,9979248 \times 10^8$ m/s, é a velocidade da luz no vácuo.

As soluções mais simples para as ondas das equações 6.3 e 6.4 são aquelas para as quais as amplitudes de campo E e B variam com x e t de acordo com as expressões

$$(6.5) \quad E = E_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$(6.6) \quad B = B_{\max} \cos(kx - \omega t).$$

Nestas expressões, E_{\max} e B_{\max} são os valores máximos dos campos, k é o número de onda e ω é a frequência angular. Como veremos adiante, é mais útil caracterizar as ondas eletromagnéticas através do seu comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ e da frequência $f = \omega/2\pi$. A relação entre a velocidade da onda, comprimento da onda e frequência é $c = \lambda f$ para ondas eletromagnéticas contínuas. Uma importante propriedade das ondas eletromagnéticas é que elas não necessitam de um meio para a propagação, podendo ser propagadas pelo vácuo.

Diferenciando as soluções 6.5 e 6.6 em função de x e t , respectivamente, obtemos:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -kE_{\max} \sin(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_{\max} \sin(kx - \omega t).$$

Usando a Eq. 6.1, temos

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$kE_{\max} \sin(kx - \omega t) = \omega B_{\max} \sin(kx - \omega t),$$

$$kE_{\max} = \omega B_{\max},$$

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{\omega}{k} = c.$$

E, portanto

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{E}{B} = c.$$

Isto é, a todo instante a razão entre o campo elétrico e o campo magnético de uma onda eletromagnética é igual à velocidade da luz.

6.3 O ESPECTRO DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

A grande contribuição de Maxwell foi mostrar que um raio luminoso é uma onda progressiva de campos elétricos e magnéticos e que a ótica, o estudo da luz visível, é um ramo do eletromagnetismo.

Na época de Maxwell (meados do século XIX) a luz visível e os raios infravermelhos e ultravioleta eram as únicas ondas eletromagnéticas conhecidas. Inspirado pelas previsões teóricas de Maxwell, Heinrich Hertz descobriu o que hoje chamamos de ondas de rádio, e observou que essas ondas se propagam com a mesma velocidade que a luz visível.

Os vários tipos de ondas eletromagnéticas diferem apenas em comprimento de onda e frequência, que estão relacionados pela relação $c = \lambda f$. A Figura 6.4 mostra o espectro eletromagnético e os nomes geralmente associados com os vários intervalos de frequência e comprimento de onda. Estes intervalos não são, em geral, bem definidos e, algumas vezes, se superpõem. Por exemplo, ondas eletromagnéticas com comprimentos de onda de aproximadamente 0,1 nm são normalmente chamadas de raios X, mas se elas tiverem origem na radioatividade nuclear, passam a ser chamadas de raios gama.

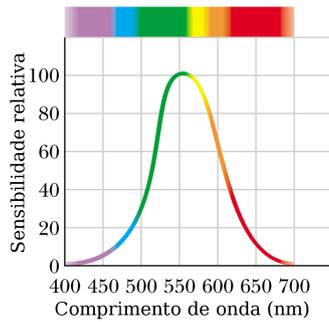


Figura 6.5 – A sensibilidade relativa do olho humano em função do comprimento de onda. ©Halliday

O olho humano é sensível à radiação eletromagnética com comprimentos de onda entre 400 e 700 nm. Esta região é chamada de **luz visível**. A Figura 6.5 mostra um gráfico da sensibilidade relativa do olho humano a radiações de vários comprimentos de onda. O centro da região visível corresponde aproximadamente a 555 nm (luz amarelo-esverdeada). Os menores comprimentos de onda da luz visível são os da luz violeta e os mais longos são os da luz vermelha. As ondas eletromagnéticas que têm comprimentos de onda menores que 400 nm, mas maiores que 10 nm, são chamadas **raios ultravioletas**. **Radiação infravermelha** corresponde a comprimentos de onda maiores que 780 nm e menores que 100 μm. O calor emitido por objetos a temperatura ambiente está na região do infravermelho do espectro eletromagnético. Em princípio, não há limites para os comprimentos de onda da radiação eletromagnética, isto é, todos os comprimentos de onda (ou frequências) são teoricamente possíveis.

6.4 ENERGIA TRANSPORTADA PELAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Como qualquer onda, as ondas eletromagnéticas podem transportar energia de um ponto para outro. Luz de lâmpadas incandescentes e calor irradiado de uma fogueira são exemplos práticos de energia sendo transportada através de ondas eletromagnéticas. Esta energia é associada com os campos elétricos e magnéticos movendo-se no espaço. A energia por unidade de volume associada com um campo elétrico, u_E , é dada por

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

e a densidade instantânea de energia u_B associada com um campo magnético é

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Assim, a energia total por unidade de volume armazenada em uma região do espaço onde há uma onda eletromagnética é

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Nesta equação, E e B representam as intensidades dos campos elétrico e magnético de uma onda em qualquer instante numa região do espaço. Como E e B variam com

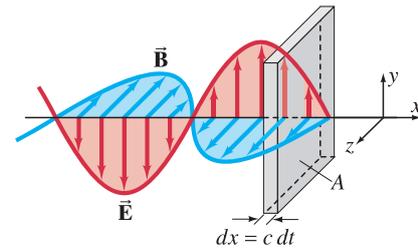


Figura 6.6 – Onda eletromagnética transportando energia através de uma área A. ©Giancoli

o tempo para uma onda eletromagnética, a densidade de energia também varia com o tempo. Usando as relações $B = E/c$ e $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, temos

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{(E/c)^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\mu_0} E^2 = \epsilon_0 E^2$$

Note que a densidade de energia associada com o campo B é igual ao valor para o campo E , isto é, $u_B = u_E$, e que cada uma contribui com metade para a energia total. Também podemos escrever a densidade de energia apenas em termos do campo B :

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 c^2 B^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

ou em termos de ambos os campos E e B ,

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 c E B$$

Estas relações dão a densidade de energia em qualquer região do espaço em qualquer instante de tempo.

Agora vamos determinar a energia que uma onda transporta por unidade de tempo por unidade de área. O fluxo de energia em uma onda eletromagnética é medido normalmente em termos da taxa de variação do fluxo de energia por unidade de área (ou de forma equivalente, potência eletromagnética por unidade de área). Descrevemos a magnitude e a direção do fluxo de energia em termos de um vetor chamado **vetor de Poynting**¹ \vec{S} . O vetor de Poynting representa potência por unidade de área e, portanto, suas unidades SI são $J/s \cdot m^2 = W/m^2$. A direção do vetor \vec{S} é a direção na qual a energia é transportada, que é a direção de propagação da onda.

Para determinar uma expressão para o vetor de Poynting \vec{S} , vamos imaginar uma onda que atravessa uma área A perpendicular ao eixo x , como mostrado na Figura 6.6. Num intervalo de tempo dt , a onda move-se para a direita percorrendo uma distância $dx = c dt$, onde c é a velocidade de propagação da onda. A energia que atravessa a área A no tempo dt é a energia que ocupa o volume $dV = A dx = A c dt$. A densidade de energia é $u = \epsilon_0 E^2$, onde E é o campo elétrico no volume dV num dado instante. Assim, a energia

¹Nome dado em homenagem ao físico britânico John Henry Poynting (1852–1914), que foi o primeiro a discutir suas propriedades.

total dU contida no volume dV é a densidade de energia u multiplicada pelo volume:

$$dU = u dV = (\epsilon_0 E^2)(Ac dt).$$

Portanto, a quantidade de energia que atravessa a área A num intervalo de tempo dt é

$$S = \frac{1}{A} \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2.$$

Como $E = cB$ e $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, podemos escrever

$$S = \epsilon_0 c E^2 = \frac{cB^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}.$$

A direção de \vec{S} é perpendicular a \vec{E} e \vec{B} , de forma que o vetor de Poynting é definido como

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}.$$

Uma onda eletromagnética pode ser totalmente especificada conhecendo-se apenas o seu campo \vec{E} e a direção e o sentido de sua propagação dados pelo vetor \vec{S} . Não é necessário conhecer \vec{B} , pois sua magnitude é determinada pela magnitude de \vec{E} e sua direção e sentido são encontrados a partir dos de \vec{E} e \vec{S} .

O que é de maior interesse para uma onda eletromagnética senoidal é a média temporal de S por um ou mais ciclos, que define sua **intensidade**, I ²:

$$I \equiv \bar{S} = \langle S \rangle = \langle \epsilon_0 c E^2 \rangle = \langle \epsilon_0 c E_{\max}^2 \cos^2(kx - \omega t) \rangle.$$

Como ϵ_0 , c e E_{\max} são constantes, temos

$$I = \epsilon_0 c E_{\max}^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle.$$

Para uma função $f(t)$ qualquer, o *valor médio temporal* é definido por

$$\langle f(t) \rangle = \overline{f(t)} \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt',$$

onde T é qualquer número inteiro de ciclos ou períodos. Para funções quadráticas de seno e cosseno, os valores médios são

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \rangle,$$

ou seja

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, o valor médio de S é

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{c B_{\max}^2}{\mu_0} = \frac{E_{\max} B_{\max}}{2\mu_0},$$

²Neste e nos próximos capítulos, a letra I representará intensidade de uma onda eletromagnética, e não corrente elétrica.

onde E_{\max} e B_{\max} são as amplitudes dos campos. Também podemos escrever a intensidade em termos dos valores quadráticos médios ou **rms** (do inglês *root mean square*) dos campos

$$I = \bar{S} = \frac{E_{\text{rms}} B_{\text{rms}}}{\mu_0},$$

onde $E_{\text{rms}} = E_{\max}/\sqrt{2}$ e $B_{\text{rms}} = B_{\max}/\sqrt{2}$.

6.5 MOMENTO E PRESSÃO DE RADIAÇÃO

Além de transportar energia, as ondas eletromagnéticas também transportam momento linear. Dessa forma, uma pressão é exercida sobre uma superfície quando uma onda eletromagnética incide sobre ela. Vamos assumir que uma onda eletromagnética transporta uma energia total U para uma superfície em um intervalo de tempo Δt . Se a superfície absorve toda a energia incidente U nesse tempo, Maxwell mostrou que o momento total \vec{p} fornecido a essa superfície tem a magnitude

$$p = \frac{U}{c} \quad (\text{absorção completa}).$$

Se, por outro lado, a superfície reflete toda a radiação que incide sobre ela, então o momento total é:

$$p = \frac{2U}{c} \quad (\text{reflexão completa}).$$

A pressão exercida sobre a superfície é definida como força por unidade de área. Combinando esta definição com a segunda lei de Newton, temos:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt}.$$

Substituindo o valor de p , o momento transportado para a superfície pela radiação eletromagnética, obtemos

$$P = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{A} \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{c} \right) = \frac{1}{c} \frac{(dU/dt)}{A}.$$

O termo $(dU/dt)/A$ mede a taxa com a qual a energia atinge a superfície por unidade de área, que é a magnitude do vetor de Poynting. Portanto, a pressão de radiação P exercida sobre a superfície absorvedora perfeita é

$$P = \frac{\bar{S}}{c}.$$

Uma superfície absorvedora na qual toda a energia incidente é absorvida (nenhuma é refletida) é denominada de **corpo negro**, que discutiremos no Capítulo 9. Para uma superfície refletora perfeita, a pressão de radiação será o dobro:

$$P = \frac{2\bar{S}}{c}.$$

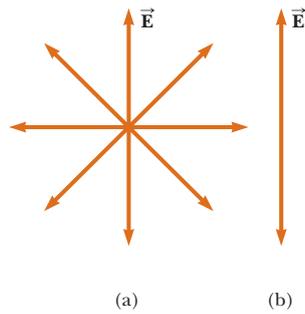


Figura 6.7 – (a) Um feixe de luz não-polarizada visto ao longo da direção de propagação (perpendicular à página). O vetor campo elétrico variável no tempo pode estar em qualquer direção no plano da página com igual probabilidade. (b) Um feixe de luz linearmente polarizada com o vetor campo elétrico variando temporalmente na direção vertical. ©Serway–Jewett

6.6 POLARIZAÇÃO

O fenômeno da polarização é uma propriedade que especifica as direções dos campos elétrico e magnético associados com uma onda eletromagnética.

Em uma onda eletromagnética, a direção do campo elétrico é perpendicular à direção de propagação da onda. Se a orientação do campo elétrico é a mesma para todas as ondas individuais em todos os instantes em um ponto particular, dizemos que a onda está **linearmente polarizada**. Ondas produzidas por várias fontes geralmente não são polarizadas. Uma fonte de luz incandescente, por exemplo, contém milhões de átomos atuando independentemente. O campo elétrico para tal onda pode ser separado em duas componentes x e y que variam aleatoriamente, pois não há correlação entre os átomos individuais produzindo a luz. A **Figura 6.7** mostra exemplos de feixes de luz não-polarizada e luz linearmente polarizada.

Para uma onda polarizada, o plano formado por \vec{E} e pela direção de propagação é chamado de plano de polarização da onda. É possível obter uma onda linearmente polarizada a partir de uma onda não-polarizada removendo-se todas as componentes do vetor campo elétrico que não estão em uma dada direção, fazendo-a passar por um filtro polarizador. Um polarizador é, portanto, um material que permite a passagem

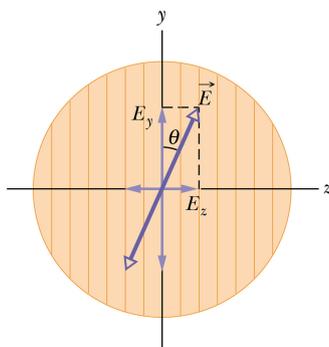


Figura 6.8 – Ação de uma película polarizadora. Apenas a componente y do campo elétrico é transmitida. ©Halliday

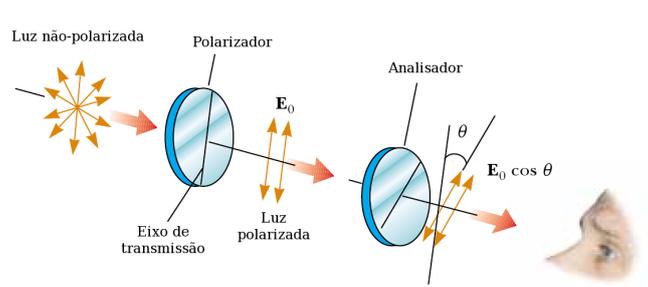


Figura 6.9 – Duas películas polarizadoras cujos eixos de transmissão fazem um ângulo θ entre si. Apenas uma fração da luz polarizada incidente sobre o analisador é transmitida. ©Serway–Jewett

apenas das componentes dos vetores campo elétrico que sejam paralelos a uma direção característica do material, chamada de direção de polarização, que define o eixo de transmissão do polarizador. Num polarizador ideal, as componentes do campo elétrico perpendiculares ao eixo de transmissão são completamente absorvidas.

Vamos agora considerar a intensidade da luz transmitida por um polarizador. Quando uma luz não-polarizada incide em um polarizador ideal, a intensidade da luz polarizada transmitida é igual à metade da intensidade incidente, não importando a orientação do polarizador. Podemos obter este resultado analisando a **Figura 6.8**, onde uma onda com campo elétrico numa direção arbitrária incide em um polarizador. A componente $E_y (= E \cos \theta)$ é transmitida, assim a intensidade de transmissão é proporcional a $E_y^2 = E^2 \cos^2 \theta$. Se a luz incidente for não-polarizada, encontraremos a intensidade total transmitida calculando a média desta expressão para todas as orientações possíveis do plano de polarização da luz incidente, isto é, para todos os valores de θ . Como o valor médio de $\cos^2 \theta$ é igual a $\frac{1}{2}$, a intensidade transmitida é

$$I = \frac{1}{2} I_0,$$

onde I_0 é a intensidade original da onda não-polarizada. Note que esta relação só é válida se a onda incidente no polarizador for não-polarizada.

Suponha agora que a luz que incide num polarizador seja polarizada. Neste caso, após passar por um primeiro polarizador P_1 , o feixe de luz, com amplitude do campo elétrico E_0 , atravessa outro polarizador P_2 , chamado de analisador, conforme mostra a **Figura 6.9**. Se os eixos de transmissão de P_1 e P_2 formam um ângulo θ entre si, apenas a componente do campo elétrico paralela ao eixo de transmissão de P_2 , $E_0 \cos \theta$, será transmitida. Lembrando que a intensidade da onda varia com o quadrado da amplitude do campo elétrico, a intensidade da luz polarizada transmitida varia com θ de acordo com

$$I = I_0 \cos^2 \theta,$$

onde I_0 é a intensidade da onda polarizada incidente sobre o analisador P_2 . Essa expressão, conhecida como **lei de Malus**, se aplica a quaisquer dois materiais polarizadores

cujos eixos de transmissão formam um ângulo θ . A partir dessa expressão, observe que a intensidade transmitida é máxima quando os eixos de transmissão são paralelos e nula (absorção completa pelo analisador) quando os eixos de transmissão são perpendiculares entre si (veja a Figura 6.10).

Existem outros meios de polarizar a luz, além dos filtros polarizadores. A luz também pode ser polarizada por *reflexão* ou por *espalhamento*. No espalhamento a luz absorvida por um átomo ou molécula é emitida novamente em outra direção.

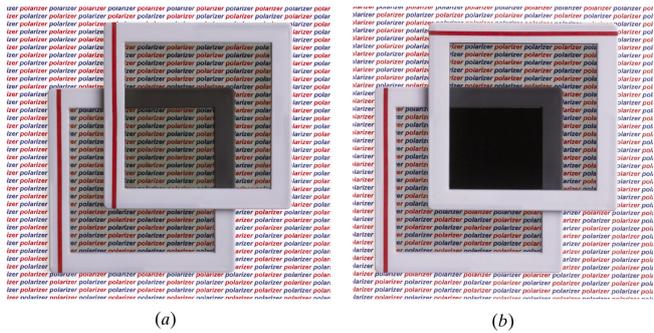


Figura 6.10 – (a) A maior parte da luz passa por duas placas polarizadoras quando a direção de polarização das placas coincide, mas (b) a maior parte da luz é absorvida quando as direções de polarização das duas placas são perpendiculares. ©Halliday

7.1 A NATUREZA DA LUZ

Antes do início do século XIX, pensava-se que a luz era composta por um fluxo de partículas (ou corpúsculos) que era emitido pelo objeto observado ou emanado pelos olhos do observador. Isaac Newton (1643–1727), o principal criador da teoria corpuscular da luz, considerava que as partículas eram emitidas de uma fonte de luz e que estas partículas estimulavam o sentido da visão assim que incidiam no olho do observador. Usando esta ideia era possível explicar os fenômenos de reflexão e refração da luz.

Muitos cientistas aceitaram a teoria corpuscular de Newton. Durante sua vida, entretanto, uma teoria alternativa para a natureza da luz foi proposta. Esta teoria suportava a ideia de que a luz poderia ser composta de algum tipo de onda em movimento. Em 1678, o físico e astrônomo holandês Christian Huygens (1629–1695) mostrou que uma teoria ondulatória da luz também seria capaz de explicar os fenômenos de reflexão e a refração.

Em 1801, Thomas Young (1773–1829) forneceu a primeira demonstração clara da natureza ondulatória da luz. Young mostrou que, sob condições apropriadas, raios de luz interferem entre si, produzindo um fenômeno chamado **interferência**, já conhecido para outros tipos de ondas. Tal comportamento não poderia ser explicado naquela época por uma teoria corpuscular pois não se concebia que duas ou mais partículas pudessem se juntar e se cancelar. Outros desenvolvimentos científicos realizados durante o século XIX levaram à uma aceitação geral da teoria ondulatória da luz, sendo que o mais importante resultou do trabalho de Maxwell que em 1873 propôs que a luz visível era uma forma de onda eletromagnética de alta frequência.

Embora o modelo de onda para a luz e a teoria clássica do eletromagnetismo eram capazes de explicar a maioria das propriedades conhecidas da luz, eles não foram capazes de explicar os resultados de outros experimentos realizados posteriormente. O mais intrigante resultado destes experimentos é o chamado *efeito fotoelétrico*, descoberto por Heinrich Hertz (1857–1894) em 1887: quando a luz incide sobre uma superfície metálica, elétrons são eventualmente ejetados da superfície. Como um exemplo das dificuldades que surgiram a partir deste fenômeno, experimentos seguintes mostraram que a energia cinética de um elétron ejetado é independente da intensidade da luz incidente. Esta descoberta contradizia a teoria ondulatória, que suportava a ideia de que quanto mais intenso era um feixe de luz maior deveria ser a energia dos elétrons. Uma explicação para o efeito fotoelétrico foi proposta por Albert Einstein (1879–1955) em 1905 em uma teoria que usava o conceito de quantização desenvolvida por Max Planck (1858–1947) em 1900.

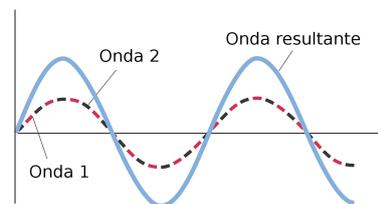


Figura 7.1 – Interferência construtiva. Se duas ondas de mesma frequência estão em fase, a amplitude da onda resultante é a soma das amplitudes das ondas individuais. As ondas 1 e 2 são idênticas, de modo que parecem ser a mesma. ©Tipler–Mosca

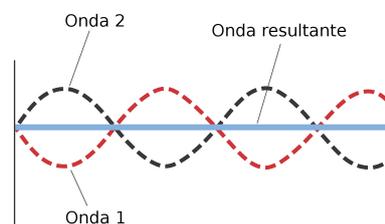


Figura 7.2 – Interferência destrutiva. Se duas ondas de mesma frequência diferem em fase de 180° , a amplitude da onda resultante é a diferença das amplitudes das ondas individuais. Se as ondas originais têm amplitudes iguais, elas se cancelam completamente. ©Tipler–Mosca

7.2 INTERFERÊNCIA DE ONDAS

Quando ondas idênticas (a menos de uma diferença de fase) provenientes de duas fontes superpõem-se em um ponto do espaço, a intensidade resultante das ondas que se combinam naquele ponto pode ser maior ou menor do que a intensidade de cada uma delas. Este efeito é chamado de **interferência**.

A interferência pode ser *construtiva*, quando a intensidade resultante é maior do que as intensidades individuais, ou *destrutiva*, quando a intensidade resultante é menor que as intensidades individuais.

As Figuras 7.1 e 7.2 mostram exemplos de combinações de ondas produzindo interferência construtiva e destrutiva, respectivamente.

Embora qualquer número de ondas possa em princípio interferir, consideraremos aqui a interferência de duas ondas somente. Supomos que cada fonte de ondas emite em um único comprimento de onda ou frequência.

Também vamos supor que a relação entre as fases das ondas não varia com o tempo. Tais ondas são chamadas *coerentes*. Quando ondas coerentes interferem, a intensidade da onda combinada em qualquer ponto do espaço não varia com o tempo.

7.2.1 Condições de interferência

- As fontes devem ser coerentes, isto é, devem manter uma diferença de fase constante.
- As fontes devem ser monocromáticas, isto é, devem ter o mesmo comprimento de onda.

7.3 INTERFERÊNCIA COM FENDAS DUPLAS

Um método para produzir duas fontes de luz coerentes é a utilização de uma fonte monocromática para iluminar um obstáculo contendo duas pequenas aberturas, ou fendas, estreitas e paralelas. O feixe de ondas luminosas planas, como o que pode ser obtido com um laser, incide sobre as fendas. Parte da luz incidente passa através das fendas, e assim as fendas podem ser consideradas como duas fontes coerentes de ondas luminosas. O espalhamento da luz ao passar pelas fendas, ilustrado na Figura 7.3a, é chamado de difração da luz e será discutido no próximo capítulo. Por enquanto vamos apenas assumir que as fendas são tão estreitas que cada uma pode ser considerada como linhas de fontes pontuais, com cada fonte pontual emitindo ondas esféricas.

O efeito de interferência de ondas luminosas provenientes de duas fontes foi inicialmente demonstrando por Thomas Young em 1801. Um diagrama esquemático do experimento realizado por Young é mostrado na Figura 7.3a. Ondas luminosas planas incidem sobre o obstáculo que contém duas fendas paralelas S_1 e S_2 . Estas duas fendas servem como um par de fontes coerentes de luz já que as ondas que as atravessam originaram-se da mesma frente de onda e portanto possuem uma relação de fase constante. A luz proveniente de S_1 e S_2 produz no anteparo um padrão visível de bandas claras e escuras chamadas franjas de interferência, correspondentes respectivamente aos máximos e mínimos na intensidade da luz, como é mostrado na Figura 7.3b. Quando a luz emitida por S_1 e por S_2 atingem um ponto na tela de tal forma que uma interferência construtiva ocorre, observamos uma franja clara. Quando a luz proveniente das duas fendas combinam-se destrutivamente em um ponto da tela, observamos uma franja escura.

A Figura 7.4 mostra alguns dos caminhos pelos quais duas ondas combinam-se na tela, produzindo interferência construtiva ou destrutiva. Na Figura 7.4a, as duas ondas, que partem das duas fendas em fase, atingem a tela no ponto central P . Como ambas as ondas percorrem a mesma distância, elas atingem o ponto P em fase. O resultado é a ocorrência de interferência construtiva neste ponto e o aparecimento de uma franja brilhante. Na Figura 7.4b, as duas ondas também começam em fase, mas neste caso a onda superior tem que viajar uma distância maior em relação a onda inferior até atingir o ponto Q . Se essa distância extra for exatamente uma medida do comprimento de onda, as ondas também atingirão o ponto Q em fase e uma nova franja brilhante será observada devido à interferência construtiva. No ponto R , entre os pontos P e Q , mostrado

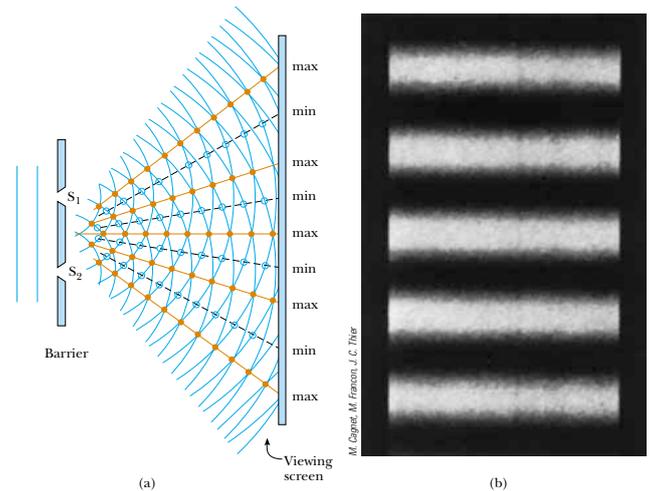


Figura 7.3 – (a) Diagrama esquemático do experimento de fenda dupla. As fendas S_1 e S_2 comportam-se como fontes coerentes de ondas luminosas que produzem um padrão de interferência na tela. (b) Padrão de interferência formado na tela. ©Serway–Jewett

na Figura 7.4c, entretanto, a onda superior percorreu uma distância extra correspondente a metade do comprimento de onda em comparação com a onda inferior. Isto significa que um “vale” da onda inferior coincide com um “pico” da onda superior, o que resulta em uma interferência destrutiva no ponto R . Por esta razão, uma franja escura é observada neste ponto.

Considerando as observações feitas para a Figura 7.4, notamos que teremos interferência construtiva sempre que a diferença entre os caminhos percorridos pelas duas ondas for zero ou um múltiplo do comprimento de onda, e teremos interferência destrutiva quando a diferença de caminhos for um múltiplo da metade do comprimento de onda da luz incidente. Se a distância entre a fonte S_1 e um ponto qualquer na tela for r_1 e a distância entre a fonte S_2 e a tela for r_2 , podemos escrever a condição para ocorrência de interferência construtiva como

$$r_2 - r_1 = n\lambda,$$

e para interferência destrutiva como

$$r_2 - r_1 = (n + \frac{1}{2})\lambda,$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ é chamado de número de ordem.

Podemos descrever estas condições com mais detalhes com a ajuda da Figura 7.5a. A tela detectora está localizada a uma distância L perpendicular às duas fendas, S_1 e S_2 . Estas fendas estão separadas por uma distância d e a fonte é monocromática. Para atingir um ponto qualquer P na parte superior da tela, uma onda proveniente da fenda S_2 deve percorrer uma distância adicional $d \sin \theta$ em relação a uma onda que parte da fenda S_1 . Esta distância é chamada *diferença de percurso*. Se $L \gg d$ então podemos considerar que as duas trajetórias r_1 e r_2 são praticamente paralelas

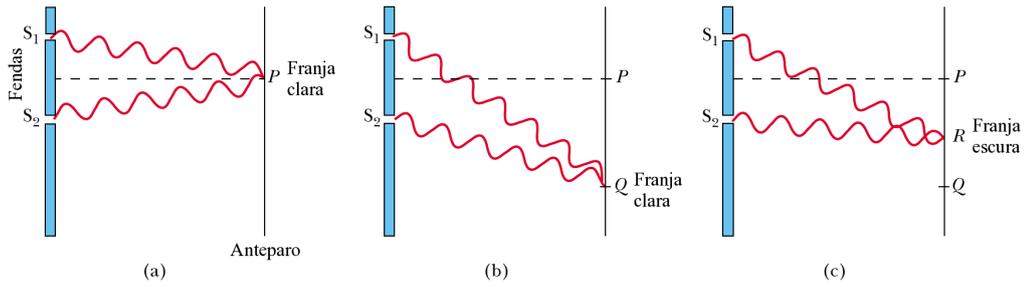


Figura 7.4 – (a) Interferência construtiva ocorre no ponto P quando as ondas se combinam. (b) Interferência construtiva também ocorre no ponto Q . (c) Interferência destrutiva ocorre no ponto R quando duas ondas se combinam pois a onda superior percorre metade do comprimento de onda a mais em relação à onda inferior. ©Serway–Jewett

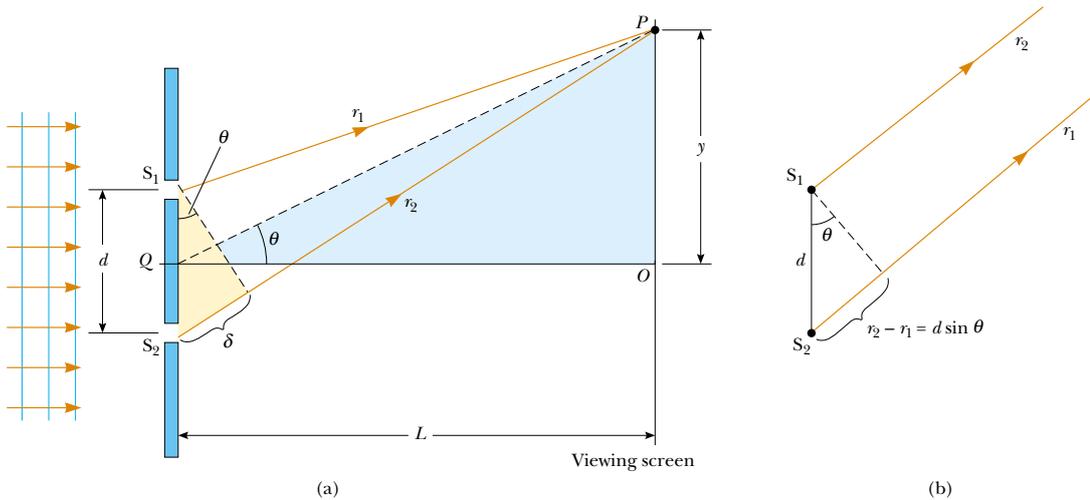


Figura 7.5 – (a) Construção geométrica para descrever o experimento de fenda dupla de Young. (b) Quando assumimos que r_1 é paralelo a r_2 , a diferença de percurso é $r_2 - r_1 = d \sin \theta$. Para que essa aproximação seja válida, é essencial que $L \gg d$. ©Serway–Jewett

(Figura 7.5b). Neste caso, vemos que

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta.$$

Como observado anteriormente, essa diferença de percurso determina se as duas ondas estão ou não em fase quando chegam em P . Agora podemos escrever a condição para ocorrer interferência como

$$d \sin \theta = n\lambda.$$

Da mesma forma, a condição para ocorrência de interferência pode ser escrita como

$$d \sin \theta = (n + \frac{1}{2})\lambda.$$

Essas equações fornecem as posições angulares das franjas. Agora vamos obter expressões para as posições lineares medidas ao longo da tela de O até P . Além de nossa suposição de que $L \gg d$, vamos supor que $d \gg \lambda$, isto é, a distância entre as duas fendas é muito maior que o comprimento de onda. Essa situação prevalece na prática para a luz visível porque L geralmente é da ordem de 1 m enquanto d é uma fração de um milímetro e λ é uma fração de um micrômetro. Sob essas condições, o ângulo θ é suficientemente pequeno e assim podemos utilizar a aproximação $\sin \theta \approx \tan \theta$. A partir

do triângulo OPQ mostrado na Figura 7.5a, observamos que

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{L}.$$

Usando este resultado e substituindo $\sin \theta = m\lambda/d$, vemos que as franjas brilhantes medidas a partir de O estão localizadas em

$$y = \frac{\lambda L}{d} n.$$

De forma semelhante, as franjas escuras localizam-se em

$$y = \frac{\lambda L}{d} (n + \frac{1}{2}).$$

Estas equações são várias demonstrações matemáticas de padrões de interferência de duas fendas. Essas equações descrevem os resultados quando duas ondas interferem de acordo com o princípio da superposição. A compreensão desse modelo de análise é importante porque a interferência de ondas ocorre de maneira relativamente comum em aplicações tecnológicas.

A experiência da fenda dupla de Young fornece um método para se medir o comprimento de onda da luz. Além disso, esta experiência deu muita credibilidade ao modelo ondulatório da luz.

7.4 INTENSIDADE DO PADRÃO DE INTERFERÊNCIA PARA ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Se observarmos atentamente as franjas brilhantes mostradas na 7.3b, notamos que há uma mudança gradual entre uma franja clara e outra escura. Até agora discutimos as localizações dos centros das franjas claras e escuras na tela detectora. Vamos agora analisar a variação da intensidade da luz em cada ponto entre as posições de interferência construtiva e destrutiva. Em outras palavras, vamos calcular a distribuição da intensidade da luz associada com o padrão de interferência de fenda dupla.

Vamos supor que as duas fendas representam fontes coerentes de ondas senoidais tal que as duas ondas provenientes de cada fenda possuem a mesma frequência angular ω e uma diferença de fase ϕ constante. A magnitude total do campo elétrico num ponto P na tela detectora mostrado na Figura 7.5a é a superposição das duas ondas. Assumindo que as ondas possuem a mesma amplitude E_0 para o campo elétrico, podemos escrever a magnitude do campo elétrico no ponto P de cada onda como

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t) \quad \text{e} \quad E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi).$$

Apesar das duas ondas estarem em fase quando partem das fendas, a diferença de fase em P vai depender da diferença de percurso $r_2 - r_1 = d \sin \theta$. Uma diferença de percurso λ (para interferência construtiva) corresponde a uma diferença de fase de 2π rad. Ou seja, a diferença de percurso será λ quando a diferença de fase ϕ for igual a 2π rad. Podemos descrever isto matematicamente como

$$\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi},$$

e portanto temos

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta.$$

Esta equação nos diz como a diferença de fase ϕ depende do ângulo θ da Figura 7.5a.

Usando o princípio da superposição, podemos obter a magnitude do campo elétrico resultante no ponto P :

$$E = E_1 + E_2 = E_0[\sin(\omega t) + \sin(\omega t + \phi)].$$

Para simplificar esta expressão, podemos utilizar a identidade trigonométrica:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

Fazendo $A = \omega t + \phi$ e $B = \omega t$, obtemos:

$$E = 2E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right),$$

que pode ser escrito como

$$E = E_P \sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right),$$

onde $E_P = 2E_0 \cos(\phi/2)$ é a amplitude do campo elétrico no ponto P .

Para obter a intensidade I no ponto P , basta relembrar que I é igual à média do vetor de Poynting, \bar{S} . Portanto, para uma onda senoidal com amplitude de campo elétrico E_P , podemos expressar a intensidade no ponto P como

$$I_P = \bar{S}_P = \frac{1}{2\mu_0 c} E_P^2.$$

A intensidade de cada onda é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico E_0 ,

$$I_0 = \bar{S}_0 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2.$$

E podemos escrever

$$\frac{I_P}{I_0} = \left(\frac{E_P}{E_0}\right)^2,$$

de onde obtemos:

$$I_P = I_0 \left(\frac{2E_0 \cos(\phi/2)}{E_0}\right)^2 = 4I_0 \cos^2(\phi/2).$$

A intensidade num ponto P qualquer é quatro vezes maior do que I_0 , a intensidade de cada onda incidente no ponto P . Para checar a consistência deste resultado, note que se $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, então a magnitude do campo elétrico no ponto P é $2E_0$ e a intensidade será máxima: $I_P = 4I_0$, correspondendo à condição para interferência construtiva máxima. De modo semelhante, se $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, então a magnitude do campo elétrico no ponto P será zero e portanto a intensidade será zero, correspondendo a interferência total destrutiva.

8.1 DIFRAÇÃO E A TEORIA ONDULATÓRIA DA LUZ

O experimento de fenda dupla realizado por Young em 1801 deu um grande suporte para a teoria ondulatória da luz. No entanto, a completa aceitação desta teoria só veio com os estudos sobre a difração mais de uma década depois, entre os anos de 1810 e 1820.

A difração é um efeito que ocorre quando a luz incidente sobre um objeto é espalhada ou desviada em torno das suas bordas. A difração também ocorre quando a luz incide sobre fendas estreitas, causando o espalhamento da luz e produzindo um padrão de interferência para o caso de uma fonte de luz coerente e monocromática, conforme discutido no capítulo anterior.

Em 1819, Augustin Fresnel (1788–1827) apresentou à Academia Francesa de Ciências uma teoria ondulatória da luz que previa e explicava os efeitos de interferência e difração. Quase imediatamente após a publicação do trabalho de Fresnel, Siméon Poisson (1781–1840), um árduo defensor da teoria corpuscular da luz, apontou um problema contra-intuitivo na teoria de Fresnel: de acordo com a teoria ondulatória, se a luz de uma fonte pontual incidisse sobre um disco opaco, parte da luz incidente seria difratada nas bordas do disco e causariam uma interferência construtiva no centro da sombra do disco (Figura 8.1a). Essa previsão parecia algo muito insólita, mas quando tal experimento foi realizado por François Arago, o ponto brilhante de fato foi observado no centro da sombra (Figura 8.1b). Esta foi uma forte evidência para a teoria ondulatória da luz. Em outras palavras, Poisson deu um tiro no pé!

Além do ponto brilhante presente no centro da sombra do disco iluminado por uma fonte de luz pontual, conforme mostrado na Figura 8.1b, também notamos franjas claras e escuras em torno da sombra, que lembram franjas de interferência do experimento de fendas duplas. De fato, elas são ocasionadas devido à interferência das ondas difratadas em torno do disco, e o padrão formado é chamado de padrão de difração.

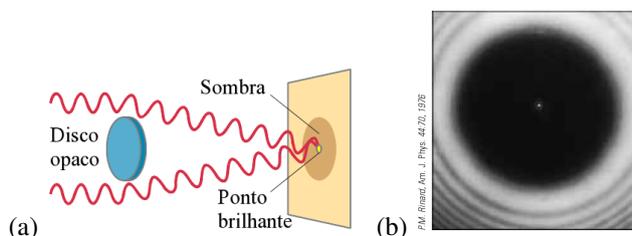


Figura 8.1 – (a) Se a luz comporta-se como onda, uma mancha brilhante aparecerá no centro da sombra de um disco opaco iluminado por uma fonte pontual de luz monocromática. (b) Padrão de difração obtido para um disco circular; note o ponto brilhante no centro da sombra do disco, como prevê a teoria ondulatória da luz.

©Giancoli

Um padrão de difração existe em torno de qualquer objeto com bordas finas quando iluminado por uma fonte pontual. Em nosso cotidiano, raramente notamos o efeito de difração pois a maior parte das fontes de luz presentes no dia-a-dia não são pontuais. Por esta razão, o padrão de difração desaparece, sendo “apagado” pela luz vinda de diferentes partes da fonte.

8.2 O PRINCÍPIO DE HUYGENS

A teoria ondulatória de Huygens utiliza uma construção geométrica que permite prever onde estará uma dada frente de onda em qualquer instante futuro se conhecermos sua posição atual. Essa construção se baseia no **princípio de Huygens**, que diz o seguinte:

Todos os pontos de uma frente de onda se comportam como fontes pontuais de ondas secundárias. Depois de um intervalo de tempo t a nova posição da frente de onda é dada por uma superfície tangente a essas ondas secundárias.

De acordo com este princípio, quando ondas planas incidem sobre pequenas aberturas, em torno de obstáculos ou bordas afiadas, as ondas são espalhadas, já que cada ponto da fenda, por exemplo, pode ser representado como uma fonte pontual de ondas secundárias (ver Figura 8.2). O resultado deste espalhamento é o efeito de difração e a consequente formação de um padrão de difração devido à interferência das ondas secundárias, como veremos a seguir.

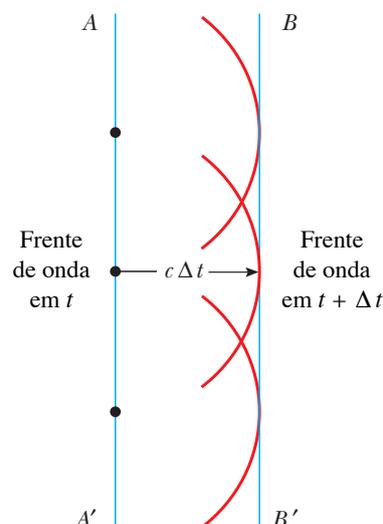


Figura 8.2 – Construção pelo princípio de Huygens de uma onda plana se propagando para a direita. ©Serway–Jewett

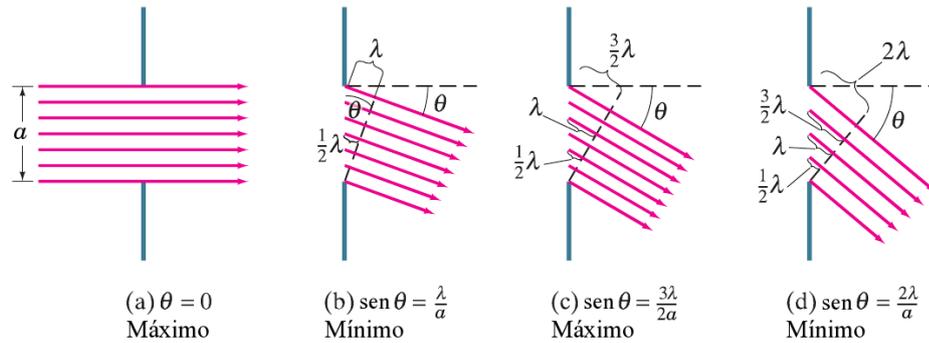


Figura 8.3 – Análise do padrão de difração formada pela luz passando através de uma fenda estreita de largura a . ©Giancoli

8.3 DIFRAÇÃO POR UMA FENDA

Vamos ver como o padrão de difração surge analisando um importante caso quando luz monocromática passa através de uma fenda estreita. Assumimos que raios paralelos de luz (ondas planas) incidem sobre uma fenda de largura a , atravessando-a e atingindo uma tela detectora suficientemente distante (isto nos garante o paralelismo dos raios). De acordo com o princípio de Huygens, ondas atravessando uma fenda vão se espalhar em todas as direções. Vamos agora examinar como as ondas que passam através de diferentes partes da fenda vão interferir entre si, produzindo um padrão de difração.

Raios paralelos de luz monocromática passam através de uma fenda estreita conforme mostrado na Figura 8.3a. A largura da fenda a é da ordem do comprimento de onda λ da luz, mas o comprimento da fenda (na direção perpendicular à página) é muito grande comparado com λ . A luz incide sobre a tela detectora que assumimos estar bem distante da fenda, tal que os raios são aproximadamente paralelos quando atingem a tela.

Inicialmente, vamos considerar ondas que passam diretamente através da fenda, conforme mostra a Figura 8.3a. As ondas estão todas em fase e, portanto, uma franja central brilhante aparecerá na tela. Na Figura 8.3b, consideramos ondas movendo-se numa direção que forma um ângulo θ com o eixo perpendicular à fenda. Este ângulo é escolhido de tal forma que a diferença de percurso entre uma onda na borda superior e outra na borda inferior é exatamente λ . Para uma onda passando através do centro da fenda, a diferença de percurso em relação à onda da borda inferior será exatamente $\frac{1}{2}\lambda$. Estas duas ondas estarão então defasadas e sofrerão interferência destrutiva quando atingirem a tela detectora, já que para ocorrer interferência destrutiva $r_2 - r_1 = (n + \frac{1}{2})\lambda$ (neste caso $n = 0$). De forma similar, uma onda imediatamente acima da onda da borda inferior se cancelará com uma onda imediatamente acima da onda central. De fato, cada onda passando através da metade inferior da fenda se cancelará com uma onda correspondente passando na parte superior da fenda. Dessa forma, todas as ondas sofrerão interferência destrutiva em pares e a intensidade da luz detectada na tela será nula para o caso em que o ângulo θ

seja dado por

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{a}.$$

A intensidade da luz tem um valor máximo para $\theta = 0^\circ$ e diminui para um mínimo (intensidade = zero) para $\theta = \text{sen}^{-1} \lambda/a$.

Agora considere um ângulo θ maior tal que a diferença de percurso entre as ondas superior e inferior seja de $\frac{3}{2}\lambda$, como mostrado na Figura 8.3c. Neste caso, dividindo a fenda em três partes iguais ($a/3$), ondas localizadas no terço inferior da fenda se cancelarão com ondas do terço central, já que a diferença de percurso entre elas será de $\frac{1}{2}\lambda$. No entanto, ondas provenientes do terço superior ainda atingirão a tela detectora, surgindo uma franja brilhante centrada aproximadamente em $\text{sen } \theta \approx 3\lambda/2a$, não tão brilhante como a franja central em $\theta = 0^\circ$.

Para um ângulo θ ainda maior tal que a diferença de percurso entre as ondas das extremidades da fenda seja 2λ (Figura 8.3d), dividindo a fenda agora em quatro partes ($a/4$), vemos que ondas do quarto inferior (entre $\frac{3}{4}a$ e a) se cancelarão com ondas da parte imediatamente superior (entre $\frac{1}{2}a$ e $\frac{3}{4}a$), já que a diferença de percurso entre elas será de $\frac{1}{2}\lambda$, e, pela mesma razão, ondas da parte superior (entre 0 e $\frac{1}{4}a$) se cancelarão com ondas da parte acima do centro da fenda (entre $\frac{1}{4}a$ e $\frac{1}{2}a$). Logo, para este ângulo, também ocorrerá um mínimo de zero intensidade no padrão de difração. Um gráfico da intensidade em função do ângulo ($\text{sen } \theta$) é mostrado na Figura 8.4, que corresponde ao que é observado experimentalmente. Note que os mínimos do

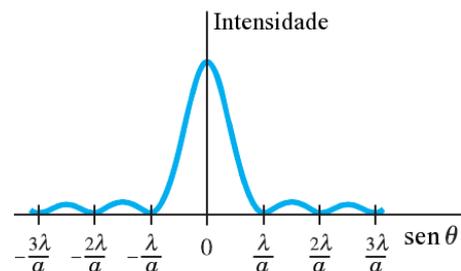


Figura 8.4 – Intensidade no padrão de difração de uma fenda única em função de $\text{sen } \theta$. Note que o máximo central é mais alto e duas vezes mais largo que os máximos secundários. ©Giancoli

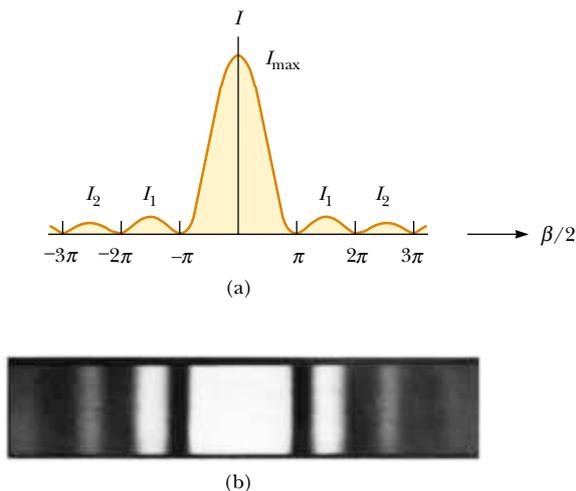


Figura 8.5 – (a) Gráfico da intensidade I versus α para o padrão de difração por uma fenda. (b) Fotografia do padrão de difração por uma fenda. ©Serway–Jewett

padrão de difração (intensidade = zero) ocorrem em ambos os lados sempre que

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

mas não em $m = 0$, onde há o máximo central mais intenso. Entre os mínimos de intensidade, ocorrerão máximos secundários com intensidade menor para valores *aproximados* (não-exatos) de $m \approx \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$.

8.4 INTENSIDADE NO PADRÃO DE DIFRAÇÃO POR UMA FENDA

A intensidade $I(\theta)$ do padrão de difração em função do ângulo θ é dada por

$$(8.1) \quad I(\theta) = I_m \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2,$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2}\phi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta.$$

O símbolo α é apenas um parâmetro conveniente para expressar a relação entre o ângulo θ que especifica a posição de um ponto na tela de observação e a intensidade luminosa $I(\theta)$ nesse ponto. I_m é o valor máximo da intensidade, que ocorre no máximo central (ou seja, para $\theta = 0$), ϕ é a diferença de fase (em radianos) entre as ondas provenientes da extremidade superior e inferior da fenda e a é a largura da fenda.

De acordo com a equação 8.1, os mínimos de intensidade ocorrem nos pontos em que

$$\alpha = m\pi, \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo esse resultado na expressão para α , obtemos

$$m\pi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

ou

$$a \sin \theta = m\lambda,$$

que é exatamente a mesma expressão que obtivemos anteriormente para a localização dos mínimos.

Exercício: Determine as intensidades dos dois primeiros máximos secundários do padrão de difração da **Figura 8.5**, expressas como porcentagens da intensidade do máximo central.

8.5 RESOLUÇÃO; DIFRAÇÃO POR UMA ABERTURA CIRCULAR

A habilidade que os sistemas ópticos possuem para distinguir objetos muito próximos entre si é limitada por causa da natureza ondulatória da luz. Para entender este problema, considere a **Figura 8.6**, que mostra duas fontes de luz distantes de uma fenda estreita. As fontes podem ser consideradas como duas fontes pontuais S_1 e S_2 , não-coerentes. Por exemplo, elas podem ser duas estrelas distantes observadas através da abertura de um telescópio. Se não ocorresse nenhuma difração, dois pontos distintos (ou imagens) brilhantes seriam observados no anteparo à direita na figura. No entanto, devido à difração, cada fonte tem sua imagem formada como uma região central brilhante envolta por franjas brilhantes e escuras mais fracas. O que se observa no anteparo é a soma de dois padrões de difração de S_1 e S_2 .

Se as duas fontes estiverem distantes o bastante para que seus máximos centrais não se sobreponham, como mostrado na **Figura 8.6a**, suas imagens podem ser distinguidas e se diz que elas estão resolvidas. Se as fontes estiverem muito próximas entre si, como na **Figura 8.6b**, os dois máximos centrais sobrepõem-se e as fontes não estarão resolvidas. Para decidir quando duas fontes estão resolvidas, usa-se frequentemente o seguinte critério:

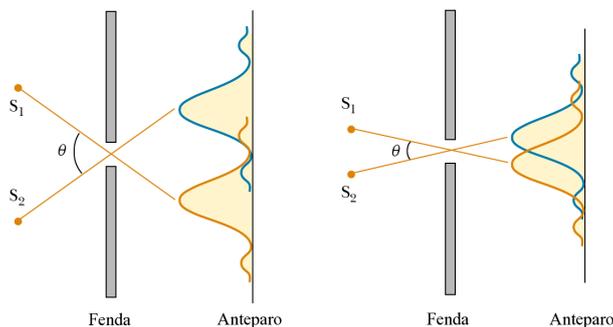


Figura 8.6 – Duas fontes pontuais distantes de uma pequena abertura, cada uma produzindo um padrão de difração. (a) O ângulo subtendido pelas fontes na abertura é grande o bastante para que os padrões de difração sejam distinguíveis. (b) O ângulo subtendido pelas fontes é tão pequeno que os padrões de difração se sobrepõem e as fontes não ficam bem resolvidas. (A figura não está em escala, e portanto os ângulos foram exagerados.) ©Serway–Jewett

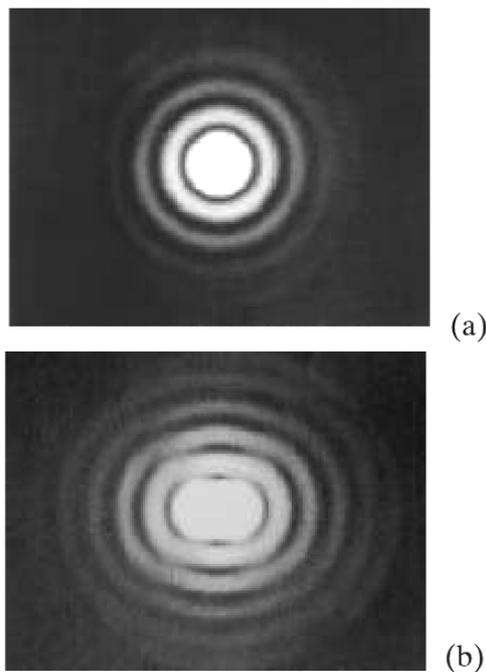


Figura 8.7 – Fotografias de imagens formadas por uma lente, mostrando o padrão de difração para (a) um único objeto pontual e para (b) dois objetos pontuais próximos cujas imagens são mal resolvidas. ©Giancoli

*Quando o máximo central do padrão de difração de uma fonte incide sobre o primeiro mínimo central do padrão de difração de uma outra fonte, diz-se que as duas fontes estão minimamente resolvidas. Essa condição limite de resolução é conhecida como **critério de Rayleigh**.*

A partir deste critério, podemos determinar a separação angular mínima θ_{\min} (ou θ_R) subentendida pelas fontes em uma fenda tal que as fontes estejam minimamente resolvidas. Vimos que o primeiro mínimo de um padrão de difração ocorre no ângulo que satisfaz a condição

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{a},$$

onde a é a largura da fenda. De acordo com o critério de Rayleigh, essa expressão fornece a menor separação angular para a qual essas duas fontes estão resolvidas. Como $\lambda \ll a$ na maioria das situações, podemos usar a aproximação $\text{sen } \theta \approx \theta$. Logo, o ângulo limite de resolução para uma fenda de largura a é

$$\theta_{\min} = \frac{\lambda}{a},$$

onde θ_{\min} é expresso em radianos. Para qualquer ângulo entre as fontes maior que λ/a , elas serão resolvidas.

Muitos sistemas ópticos utilizam aberturas circulares em vez de fendas. O padrão de difração de uma abertura circular, conforme é mostrado na **Figura 8.7**, consiste de um disco central brilhante (geralmente chamado disco de Airy) cercado por anéis progressivamente mais fracos. Uma

análise do padrão de difração mostra que o ângulo limite de resolução da abertura circular é

$$\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

onde D é o diâmetro da abertura circular. Note que esta equação difere daquela para a fenda apenas pelo fator 1,22.

8.6 INTENSIDADE DO PADRÃO DE DIFRAÇÃO POR FENDA DUPLA

No experimento de fenda dupla discutida no capítulo anterior, supusemos implicitamente que as fendas eram muito mais estreitas que o comprimento de onda da luz utilizada, ou seja, $a \ll \lambda$. No caso de fendas estreitas o máximo central do padrão de difração de cada fenda cobre toda a tela de observação, e a interferência da luz proveniente das duas fendas produz franjas claras quase com a mesma intensidade (**Figura 8.8b**).

Na prática, porém, a condição $a \ll \lambda$ nem sempre é satisfeita. Quando as fendas são relativamente largas a interferência da luz proveniente das duas fendas produz franjas claras de diferentes intensidades. Isso acontece porque as intensidades das franjas produzidas por interferência são modificadas pela difração sofrida pela luz ao passar pelas fendas (**Figura 8.8a**). A intensidade resultante então será uma combinação do padrão de interferência e do padrão de difração da luz incidente da fenda dupla.

A intensidade do padrão de difração de fenda dupla é dada pela expressão:

$$(8.2) \quad I(\theta) = I_m(\cos^2 \beta) \left(\frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right)^2$$

onde

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \text{sen } \theta$$

e

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \text{sen } \theta,$$

onde d é a distância entre os centros das fendas e a é a largura das fendas. Observe que o lado direito da equação 8.2 é o produto de I_m por dois fatores: (1) o *fator de interferência* $\cos^2 \beta$, associado à interferência da luz que passa pelas duas fendas; (2) o *fator de difração* $[(\text{sen } \alpha)/\alpha]^2$, associado à difração causada pelas fendas. Estes dois fatores são mostrados nas Figuras 8.8a e 8.8b para o caso quando $d = 6a$ e $a = 10\lambda$. A **Figura 8.8c** mostra o produto destas duas curvas (multiplicado por I_m) que é a intensidade resultante em função do ângulo θ , de acordo com a equação 8.2. A curva tracejada indica o fator de difração que se comporta como um envoltório, modulando a intensidade das franjas do padrão de interferência.

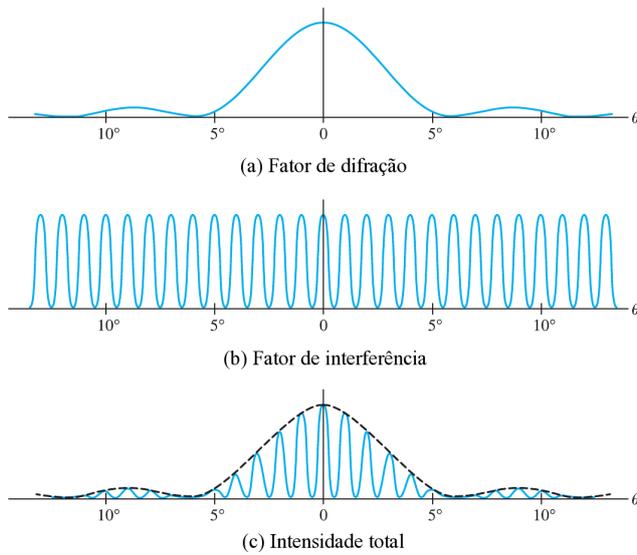


Figura 8.8 – Gráfico do (a) fator de difração, (b) fator de interferência e (c) intensidade resultante $I(\theta)$, em função do ângulo θ , para $d = 6a$ e $a = 10\lambda$. ©Giancoli

8.7 REDES DE DIFRAÇÃO

Um grande número de fendas estreitas igualmente espaçadas compõem um dispositivo chamado **rede de difração**, embora o termo “rede de interferência” seria mais apropriado, como veremos. Redes de difração geralmente são produzidas fazendo-se um número muito grande de linhas finas e paralelas em uma placa de vidro. A densidade de linhas é de cerca de 10^4 linhas por centímetro para uma rede de difração comum.

A análise de uma rede de difração é muito parecida com o experimento de fenda dupla de Young. Assumimos que raios paralelos de luz incidem sobre uma rede, como mostrado na Figura 8.9. Também consideramos que as fendas são estreitas o bastante para que o efeito de difração em cada uma delas produza espalhamento da luz em várias direções ao atingirem um anteparo, podendo ocorrer interferência da luz proveniente de diferentes fendas. Ondas de luz que passam através de cada fenda sem desvio ($\theta = 0^\circ$) produzirão interferência construtiva e uma linha brilhante aparece no centro do anteparo. Interferência construtiva também ocorre

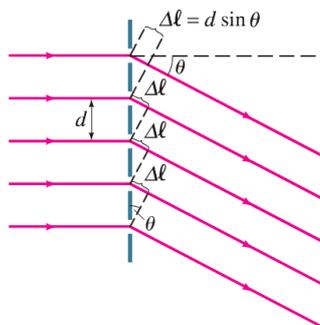


Figura 8.9 – Representação gráfica de uma rede de difração. ©Giancoli

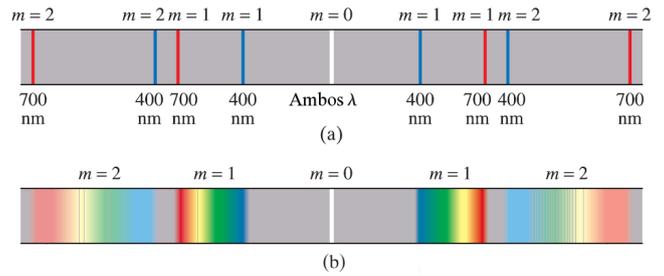


Figura 8.10 – Espectro produzido por uma rede de difração: (a) dois comprimentos de onda, 400 nm e 700 nm; (b) luz branca. A segunda ordem será normalmente mais fraca que a primeira. ©Giancoli

para ângulos θ tal que ondas de fendas adjacentes percorrem uma distância extra de $\Delta\ell = m\lambda$, onde m é um número inteiro. Se d é a distância entre cada fenda, então vemos na Figura 8.9 que $\Delta\ell = d \sin \theta$, e portanto

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots,$$

é o critério para ocorrência de máximos produzidos por uma rede de difração. Esta é a mesma equação para a interferência de fenda dupla e o parâmetro m é chamado de ordem do padrão de difração. Esta expressão pode ser utilizada para se calcular o comprimento de onda a partir do conhecimento do espaçamento d da rede e do ângulo de desvio θ .

Suponha agora que a luz incidente sobre uma rede de difração não seja monocromática, mas consiste de dois ou mais comprimentos de onda. Então, para todas as ordens exceto $m = 0$, cada comprimento de onda produzirá um máximo num ângulo diferente (Figura 8.10). Se luz branca incide sobre uma rede, o máximo central ($m = 0$) será um pico estreito branco, enquanto para todas as outras ordens aparecerá um espectro de cores espalhadas sobre uma certa distância angular, conforme mostrado na Figura 8.10b. Como uma rede de difração espalha a luz em suas componentes de diferentes comprimentos de ondas, o padrão resultante é chamado de **espectro**.

Um exemplo bastante comum de difração é o padrão de arco-íris que aparece na superfície de um CD. A superfície de um CD tem uma trilha espiral (com um espaçamento de aproximadamente $1 \mu\text{m}$) que age como uma rede refletora. A luz espalhada por essas trilhas que estão bem próximas interfere construtivamente em direções que dependem do comprimento de onda e da direção da luz incidente. Qualquer seção do disco serve como uma rede de difração para a luz branca, enviando feixes de interferência construtiva de cores diferentes em direções diferentes. As cores diferentes que você vê quando está observando uma seção do disco mudam quando a fonte de luz, o disco ou você se deslocam para mudar o ângulo de incidência ou o ângulo de visão.

9.1 RADIAÇÃO DE CORPO NEGRO E A TEORIA DE PLANCK

Uma das observações que não possuíam uma explicação até o final do século XIX (~ 1890) era o espectro da luz emitida por objetos quentes. Um corpo em qualquer temperatura emite energia, denominada **radiação térmica**, cuja intensidade é proporcional à quarta potência da temperatura (T , em Kelvin), $I \propto T^4$. Um objeto em temperatura ambiente ($T \approx 300$ K) emite radiação com baixa intensidade e, portanto, não notamos tal radiação. Para temperaturas mais elevadas, há radiação suficiente que possibilita sentir calor nas proximidades do objeto. Para temperaturas ainda mais altas (da ordem de 1000 K), objetos tornam-se incandescentes, emitindo luz avermelhada, como a resistência de uma torradeira. Para temperaturas acima de 2000 K, objetos brilharão com uma cor amarelada ou esbranquiçada, como o filamento de uma lâmpada. A luz emitida é contínua em comprimentos de onda ou frequências e seu espectro é um gráfico da intensidade vs. comprimento de onda (ou frequência). À medida que a temperatura aumenta, a radiação eletromagnética emitida pelos objetos não apenas aumenta em intensidade como também atinge um pico para frequências cada vez mais altas.

O espectro da luz emitida por um objeto quente é mostrado na **Figura 9.1** para um **corpo-negro** ideal. Um corpo-negro é um objeto que absorve toda a radiação que incide sobre ele. A radiação que seria emitida por um corpo-negro ideal é chamada de **radiação de corpo-negro** e se aproxima da radiação emitida por muitos objetos. A curva de 6000 K na **Figura 9.1**, correspondente à temperatura na superfície do Sol, possui um pico na parte visível do espectro. Para temperaturas mais baixas, a radiação total diminui consideravelmente e o pico ocorre para comprimentos de

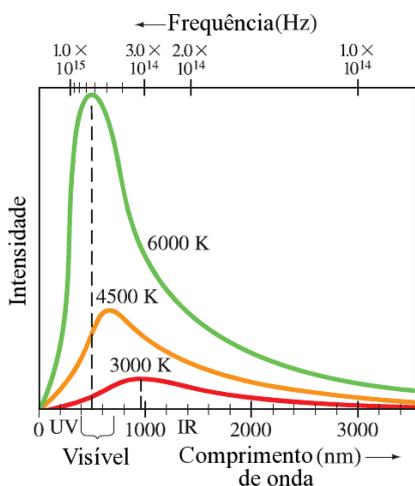


Figura 9.1 – Intensidade da radiação de corpo-negro em função do comprimento de onda para três temperaturas. ©Giancoli

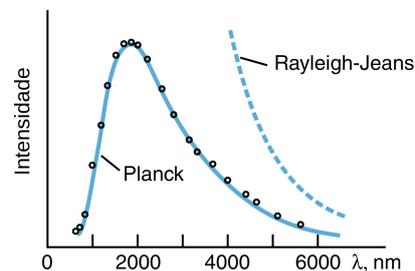


Figura 9.2 – Comparação da teoria de Rayleigh-Jeans com a de Planck, que ajusta os dados experimentais. ©Tipler-Llewellyn, Física Moderna, 3ed.

onda maiores (ou frequências mais baixas). Por esta razão, objetos emitem luz vermelha quando aquecidos a 1000 K, por exemplo.

A intensidade total I (a taxa média de radiação de energia por unidade de área ou potência média por área) emitida pela superfície de um corpo negro a uma temperatura T é dada pela **lei de Stefan-Boltzmann**:

$$I = \sigma T^4,$$

onde σ é uma constante fundamental, chamada constante de Stefan-Boltzmann, e T é a temperatura absoluta em Kelvin. Em unidades SI, seu valor é

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

O comprimento de onda correspondente ao pico máximo da intensidade da radiação de corpo-negro, λ_{max} , obtido experimentalmente, relaciona-se com a temperatura T em Kelvin por

$$\lambda_{\text{max}} T = 2,90 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}.$$

Esta relação é conhecida como **lei de deslocamento de Wien**.

Um dos maiores problemas enfrentados pelos cientistas em 1890 era justamente explicar a radiação de corpo-negro. A teoria eletromagnética de Maxwell previa que cargas elétricas oscilando produzem ondas eletromagnéticas e a radiação emitida por um objeto quente poderia ocorrer devido às oscilações das cargas elétricas nas moléculas do material. Esta hipótese poderia explicar de onde a radiação se origina, mas não previa corretamente o espectro observado da luz emitida. Duas importantes curvas teóricas baseadas em ideias clássicas foram propostas por W. Wien (em 1896) e por Rayleigh (em 1900). Esta última foi modificada por J. Jeans e desde então tem sido conhecida como teoria de Rayleigh-Jeans e pode ser expressa como:

$$I(\lambda, T) = 2\pi c k T \lambda^{-4},$$

onde $I(\lambda, T)$ é a intensidade da radiação como função do

comprimento de onda e da temperatura, k é a constante de Boltzmann e c é a velocidade da luz. Quando dados experimentais precisos foram obtidos, tornou-se evidente que nenhuma destas duas formulações teóricas concordavam com os experimentos, como mostra a [Figura 9.2](#). Em particular, para pequenos comprimentos de onda a teoria de Rayleigh-Jeans prevê intensidade infinita para a radiação de corpo negro, um efeito chamado de “catástrofe do ultravioleta”.

No ano de 1900, Max Planck (1858–1947) propôs uma fórmula empírica para ajustar os dados (chamada fórmula da radiação de Planck):

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1},$$

onde novamente $I(\lambda, T)$ é a intensidade da radiação como função do comprimento de onda e da temperatura, k é a constante de Boltzmann, c é a velocidade da luz e h é uma nova constante, chamada constante de Planck. O valor de h foi estimado por Planck para ajustar sua fórmula aos dados experimentais. O valor de h aceito hoje é

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

Para dar um embasamento teórico para sua fórmula, Planck fez uma hipótese radical: a energia das oscilações dos átomos dentro das moléculas não pode ter qualquer valor; em vez disso, cada oscilação tem uma energia que é um múltiplo de um valor mínimo relacionado com a frequência da oscilação, f , por

$$E = hf.$$

Assim, de acordo com a hipótese de Planck, a energia de qualquer vibração molecular pode ser somente escrita como um múltiplo da quantidade hf , isto é:

$$E = nhf, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

onde n é chamado de número quântico (o termo “quântico” está associado a uma quantidade discreta, o oposto de “contínuo”). Isto implica que a energia não é uma quantidade contínua, como se pensava há séculos; de acordo com Planck, a energia é quantizada, existindo apenas em quantidades discretas. A menor quantidade de energia possível (hf) é chamada de **quantum** de energia.

Quando Planck apresentou sua teoria, a maioria dos cientistas (incluindo Planck!) não considerava o conceito quântico realístico. Achava-se que era um truque matemático que conseguia prever resultados corretos. Portanto, Planck e outros continuaram a procurar por aquilo que consideravam ser uma explicação mais racional da radiação do corpo negro. Porém, desenvolvimentos subsequentes mostraram que uma teoria baseada no conceito quântico (em vez de conceitos clássicos) era necessária para explicar vários outros fenômenos no nível atômico.

9.2 EFEITO FOTOELÉTRICO E A TEORIA DE EINSTEIN SOBRE O FÓTON

A radiação do corpo negro foi historicamente o primeiro fenômeno a ser explicado com um modelo quântico. No fim do século XIX, ao mesmo tempo em que dados sobre a radiação térmica eram obtidos, experiências mostraram que luz incidente sobre uma superfície metálica fazia com que elétrons fossem emitidos da superfície. Esse fenômeno foi descoberto por Hertz e é chamado **efeito fotoelétrico**.

No ano de 1905, Albert Einstein (1879–1955) fez duas de suas maiores contribuições para a física moderna. Introduziu a teoria da relatividade restrita e fez uma extensão da ideia de quantum propondo uma nova teoria da luz. De acordo com o trabalho de Planck, a energia vibracional das moléculas num objeto é quantizada com energia $E = nhf$, onde n é um número inteiro e f é a frequência da vibração. Einstein sugeriu que quando luz é emitida por uma molécula oscilando, a energia nhf deveria diminuir por uma quantidade hf (ou por $2hf$, etc), resultando numa quantidade $(n - 1)hf$. Então, pelo princípio da conservação da energia, a luz deveria ser emitida em pacotes, ou quanta, cada um com energia

$$E = hf,$$

onde f é a frequência da luz emitida.

Como toda luz é irradiada a partir de uma fonte, esta ideia sugere que a luz deve ser transmitida através de partículas, ou fótons, como elas são chamadas atualmente, assim como através de ondas eletromagnéticas previstas pela teoria de Maxwell. A teoria do fóton de Einstein representa uma ruptura radical das ideias clássicas. Para verificá-la, Einstein propôs um teste através de medidas quantitativas do efeito fotoelétrico.

A emissão de elétrons quando luz incide sobre uma superfície metálica é consistente com a teoria eletromagnética da luz: o campo elétrico de uma onda eletromagnética poderia exercer uma força sobre os elétrons no metal e ejetar alguns deles. Einstein notou, porém, que a teoria ondulatória e a teoria de fótons da luz resultam em previsões muito distintas para os detalhes do efeito fotoelétrico. Por exemplo, podemos medir a energia cinética máxima (K_{\max}) dos elétrons emitidos e comparar as previsões feitas por estas duas teorias.

Primeiramente, de acordo com a teoria ondulatória da luz, as duas propriedades importantes da luz são sua intensidade e sua frequência (ou comprimento de onda). Quando estas quantidades variam, essa teoria faz as seguintes previsões para o efeito fotoelétrico:

1. Se a intensidade da luz aumenta, o número de elétrons ejetados e sua energia cinética máxima deve aumentar, já que uma intensidade maior implica em uma amplitude do campo elétrico maior, e quanto maior o campo elétrico maior será a velocidade de ejeção dos elétrons.
2. A frequência da luz não deve afetar a energia cinética dos elétrons ejetados. Apenas a intensidade afeta K_{\max} .

No modelo de Einstein, um fóton da luz incidente fornece toda a sua energia hf para um único elétron do metal. A energia cinética máxima para esses elétrons emitidos é

$$K_{\max} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\max} = hf - \varphi,$$

onde h é a constante de Planck, f é a frequência do fóton incidente e φ é chamada de função trabalho, característica de cada metal, que representa a energia mínima necessária para remover um elétron da sua superfície. A função trabalho pode ser escrita como

$$\varphi = hf_0,$$

onde f_0 é chamada de frequência de corte para um dado metal. Como a energia cinética do elétron deve ser positiva, verificamos que a frequência f do fóton incidente deve ser maior que f_0 para ocorrer o efeito fotoelétrico.

Podemos resumir as previsões feitas pela teoria proposta por Einstein nos seguintes itens:

1. Um aumento da intensidade da luz implica em mais fótons incidentes, e portanto mais elétrons são ejetados. Porém, a energia cinética máxima dos elétrons não muda, já que a energia de cada fóton é sempre hf .
2. Se a frequência da luz aumenta, a energia cinética máxima dos elétrons aumenta: $K_{\max} = hf - \varphi$.
3. Se a frequência f da luz é menor que a frequência de corte f_0 , nenhum elétron será ejetado, não importando quão elevada seja a intensidade da luz.

Estas previsões para a teoria de fótons da luz são claramente bem diferentes das previsões da teoria ondulatória. Entre 1913 e 1914, experimentos meticulosos feitos por R. A. Milikan comprovaram que o efeito fotoelétrico era corretamente explicado pela teoria proposta por Einstein.

9.3 ESPALHAMENTO COMPTON

Uma nova evidência que suportava a teoria de fótons da luz foi descoberta por Arthur H. Compton (1892–1962), que mediu o espalhamento de raios-X por elétrons em 1923. De acordo com a teoria clássica, quando uma onda eletromagnética de frequência f_1 incide sobre um material contendo cargas, as cargas oscilarão com esta frequência e reemitirão ondas eletromagnéticas de mesma frequência. Compton notou que se o processo de espalhamento fosse representado como sendo uma colisão entre um fóton e um elétron, o elétron absorveria energia e portanto recuaria. O fóton espalhado teria então menos energia e portanto uma frequência mais baixa (ou comprimento de onda maior) que o fóton incidente.

De acordo com a teoria eletromagnética clássica, a energia e o momento de uma onda eletromagnética estão relacionados por

$$E = pc.$$

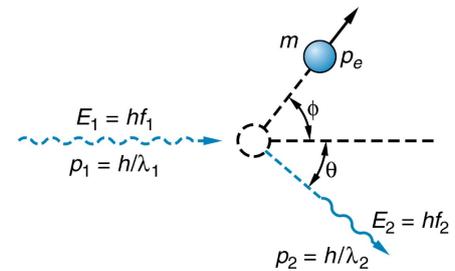


Figura 9.3 – Espalhamento Compton. Colisão de um fóton de momento h/λ_1 com um elétron livre. ©Tipler–Llewellyn, Física Moderna, 3ed.

Se um fóton tem energia $E = hf = hc/\lambda$, seu momento deve ser então $p = E/c = hf/c = h/\lambda$:

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

Compton aplicou as leis da conservação de momento e energia para a colisão de um fóton e um elétron para calcular o momento p_2 e assim o comprimento $\lambda_2 = h/p_2$ do fóton espalhado (Figura 9.3). Como o resultado obtido por Compton depende da teoria da relatividade restrita de Einstein, apresentamos aqui apenas seu resultado. Os comprimentos de onda λ_1 , associado com o fóton incidente, e λ_2 , associado com o fóton espalhado, estão relacionados entre si e ao ângulo de espalhamento θ pela seguinte expressão:

$$(9.1) \quad \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

onde m_e é a massa do elétron. A mudança no comprimento de onda independe do comprimento de onda original. A quantidade $h/m_e c$ depende apenas da massa do elétron e de constantes fundamentais. Ela possui dimensão de comprimento e é chamada de **comprimento de onda de Compton**, cujo valor é

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

Como $\lambda_2 - \lambda_1$ possui um valor muito pequeno, esta variação é muito difícil de ser observada. Porém, se utilizamos λ_1 pequeno o suficiente para tornar a razão $(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1$ mensurável, podemos obter por qual fração o comprimento de onda original foi alterado. Compton utilizou raios-X de comprimento de onda equivalente a 71,1 pm (1 pm = 1×10^{-12} m). A energia de fóton com este comprimento de onda é $E = hc/\lambda = 17,4 \text{ keV}^1$. Os resultados experimentais obtidos por Compton para $\lambda_2 - \lambda_1$ em função do ângulo de espalhamento θ concordaram com a Eq. 9.1, confirmando portanto a validade do conceito de fóton, isto é, a natureza corpuscular da luz.

¹ 1 eV = 1 elétron-volt = $1,60 \times 10^{-19}$ J.

9.4 A DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA DA LUZ

O efeito fotoelétrico, o espalhamento Compton, entre outros experimentos, colocaram a teoria de fótons da luz numa sólida base experimental. Mas, e quanto aos experimentos clássicos de Young, entre outros, sobre a interferência e a difração da luz, que mostraram que a teoria ondulatória da luz também é suportada por uma forte base experimental?

Estamos em um verdadeiro dilema. Alguns experimentos indicam que a luz comporta-se como onda; outros indicam que ela comporta-se como um feixe de partículas. Estas duas teorias parecem ser incompatíveis, mas ambas mostram-se válidas. Para resolver esta questão, os físicos finalmente chegaram à conclusão de que esta **dualidade onda-partícula** da luz deve ser aceita como um fato natural. Aparentemente, a luz é um fenômeno mais complexo do que simplesmente dizer que ela é uma onda ou um feixe de partículas.

Para clarificar esta situação, o ilustre físico dinamarquês Niels Bohr (1885–1962), propôs seu famoso **princípio da complementaridade**. Este princípio diz que para se entender um experimento, algumas vezes encontramos uma explicação usando a teoria ondulatória e outras vezes usando a teoria de partículas. Ainda assim, devemos ter noção dos dois aspectos da luz, onda e partícula, se quisermos ter uma completa compreensão da natureza da luz. Portanto, estes dois aspectos da luz complementam um ao outro.

Cabe lembrar que a equação de Einstein $E = hf$ representa ambos aspectos de onda e partícula de um feixe de luz. Nesta equação, E refere-se à energia de uma partícula, enquanto f é a frequência associada à sua correspondente onda.

10.1 PRIMEIROS MODELOS ATÔMICOS

A ideia de que a matéria é feita de átomos era bem aceita pela maioria dos cientistas por volta de 1900. Com a descoberta do elétron por J. J. Thomson (1856–1940), em 1897, iniciou-se a busca por modelos que descrevessem a estrutura dos átomos, incluindo os elétrons em sua composição.

Um primeiro modelo proposto para o átomo é mostrado na [Figura 10.1](#). Thomson propôs que a carga positiva estaria distribuída uniformemente dentro de uma esfera com as dimensões do átomo, e os elétrons estariam dentro dessa nuvem positiva (como passas num bolo).

Por volta de 1911, Ernest Rutherford (1871–1937) e seus assistentes, H. W. Geiger e E. Marsden, realizaram experimentos cujos resultados contradiziam o modelo de Thomson do átomo. Nestes experimentos, um feixe de partículas carregadas positivamente, chamadas partículas α (que atualmente sabemos tratar-se de núcleos do hélio), era apontado para uma folha de ouro muito fina (da ordem de 10^{-3} mm, correspondendo a algumas milhares de camadas atômicas). O espalhamento das partículas α , ao colidirem com os átomos, poderia então ser detectado caso ele ocorresse.

Pelo modelo de Thomson, esperava-se que as partículas α não seriam espalhadas significativamente, já que os elétrons são muito mais leves (a massa de uma partícula α é cerca de 8000 vezes maior que a de um elétron). Além disso, como a carga positiva do átomo estaria uniformemente distribuída dentro do raio atômico, também não poderia produzir desvios muito grandes nas trajetórias das partículas α devido a repulsões elétricas.

Os resultados experimentais contrariaram completamente estas previsões. Observou-se que a maioria das partículas α atravessavam a folha de metal sem serem desviadas, como se a folha fosse feita de vazios, praticamente transparente! Mas a observação mais importante foi a aparição de partículas α desviadas a grandes ângulos, algumas inclusive na direção oposta de onde tinham vindo. Rutherford fez uma interessante analogia em relação a este fato: “*era quase tão incrível como se você disparasse uma bala de canhão contra um lenço de papel e ela fosse defletida para trás atingindo você*”.

Refletindo sobre esta observação, Rutherford chegou à conclusão de que as partículas α carregadas positivamente estavam sendo repelidas por um pequeno núcleo maciço de carga positiva localizado na região central do átomo. O átomo então consistiria de um núcleo positivo contendo cerca de 99,9% da massa do átomo, cercado pelos elétrons que se moveriam em órbitas em torno do núcleo. Os experimentos de Rutherford sugeriram que o núcleo deveria ter um raio entre 10^{-15} e 10^{-14} m, enquanto o raio dos átomos era da ordem de 10^{-10} m. Portanto, os elétrons deveriam estar

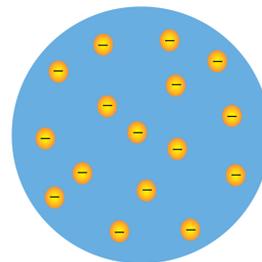


Figura 10.1 – Modelo atômico de Thomson. ©Tipler–Mosca

distantes do núcleo cerca de 10.000 a 100.000 vezes o raio do núcleo. (Se o núcleo fosse do tamanho de uma bola de futebol, o átomo teria o diâmetro correspondente ao de uma cidade grande, com dezenas de quilômetros de diâmetro.) Assim, um átomo seria composto principalmente de espaço vazio!

10.2 O ESPECTRO ATÔMICO

No início do século XX, uma grande quantidade de dados havia sido coletada sobre a emissão de luz por átomos em um gás excitado por descargas elétricas. Quando observada através de um espectroscópio de fenda estreita, a luz aparece como um conjunto de linhas discretas de diferentes cores ou comprimentos de onda, onde o espaçamento e a intensidade das linhas são características de cada elemento que constitui o gás. Os comprimentos de onda das linhas espectrais poderiam então ser determinadas com precisão para cada espectro. A [Figura 10.2](#) mostra o espectro de linhas para o hidrogênio, mercúrio e neônio.

Em 1884, um professor do ensino médio da Suíça, Johann J. Balmer (1825–1898), encontrou que os comprimentos de onda das quatro linhas no espectro visível do hidrogênio (com comprimentos de onda medidos de 410 nm, 434 nm, 486 nm e 656 nm) podem ser representados pela expressão

$$\lambda = (364,6 \text{ nm}) \frac{m^2}{m^2 - 4}, \quad m = 3, 4, 5, 6.$$

Balmer sugeriu que isto poderia ser um caso particular de uma expressão mais geral que seria aplicável aos espectros de outros elementos. Esta expressão geral foi obtida por Johannes R. Rydberg e Walter Ritz e é conhecida como fórmula de Rydberg–Ritz. O inverso do comprimento de onda pode ser obtido pela equação

$$(10.1) \quad \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

onde n_1 e n_2 são números inteiros com $n_1 > n_2$ e R é a constante de Rydberg, que é a mesma para todas as séries espectrais de um mesmo elemento e varia de elemento para

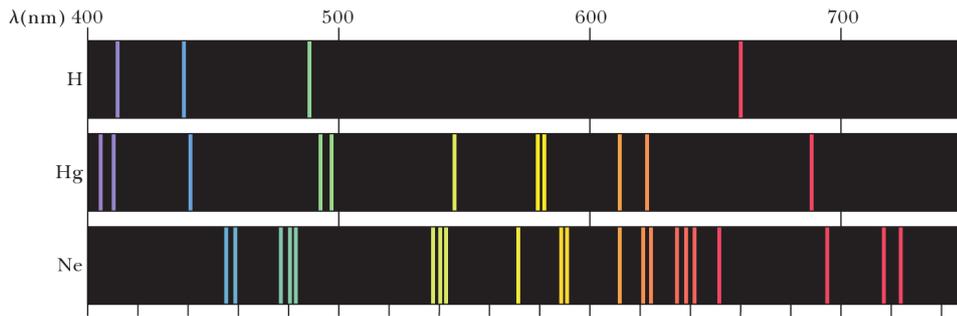


Figura 10.2 – Linhas espectrais produzidas pela emissão na faixa espectral visível dos elementos hidrogênio, mercúrio e neônio. ©Serway–Jewett

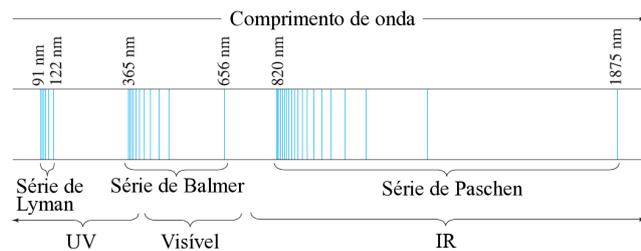


Figura 10.3 – Espectro de linhas do hidrogênio. Cada série é obtida pela fórmula de Rydberg–Ritz, onde $n_2 = 1$ para a série de Lyman, $n_2 = 2$ para a série de Balmer e $n_2 = 3$ para a série de Paschen, e assim por diante. n_1 pode ter qualquer valor inteiro desde que $n_1 > n_2$. As únicas linhas na região visível do espectro eletromagnético fazem parte da série de Balmer. ©Giancoli

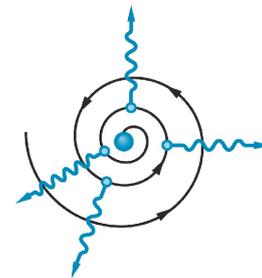


Figura 10.4 – No modelo de Rutherford, baseado apenas em princípios da física clássica, o elétron descreve uma espiral em direção ao núcleo porque está constantemente irradiando energia. ©Tipler–Llewellyn, Física Moderna, 3ed.

elemento de forma regular. Para o hidrogênio, o valor desta constante é

$$R_H = 1,096776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

A fórmula de Rydberg–Ritz dá os comprimentos de onda de todas as linhas no espectro do hidrogênio assim como de elementos alcalinos como o lítio e o sódio.

O modelo atômico de Rutherford era incapaz de explicar por que átomos emitem espectros formados por linhas espectrais. Ele ainda possuía outros problemas. De acordo com este modelo, elétrons orbitariam o núcleo de um átomo e, como as trajetórias são curvas, eles deveriam possuir uma aceleração para se manterem em órbita. Assim, eles deveriam emitir luz como qualquer outra carga elétrica acelerada, com uma frequência igual à sua frequência orbital. Como luz transporta energia e a energia deve ser conservada, a energia dos elétrons deveria diminuir para compensar este efeito. Assim, os elétrons descreveriam órbitas espiraladas em torno do núcleo, aumentando a frequência orbital e, portanto, a frequência da luz emitida (ver Figura 10.4). Logo, o modelo atômico de Rutherford previa que os átomos não seriam estáveis!

Claramente o modelo de Rutherford não era suficiente para explicar os átomos. Algum tipo de modificação era necessária: a inclusão da hipótese quântica.

10.3 MODELO ATÔMICO DE BOHR

Niels Bohr (1885–1962), trabalhando no laboratório de Rutherford em 1912, propôs um modelo para o átomo de hidrogênio que combinava os trabalhos de Planck, Einstein e Rutherford e que previa com bastante sucesso os espectros observados. Baseando-se no átomo mais simples, o hidrogênio, Bohr desenvolveu um modelo que explicava porque o átomo era estável. Podemos enumerar as principais hipóteses utilizadas por Bohr em sua teoria aplicada ao átomo do hidrogênio nos seguintes postulados:

1. O elétron move-se numa órbita circular em torno do núcleo sob a ação da força de Coulomb de atração, como mostrado na Figura 10.5.
2. Apenas certas órbitas eletrônicas são estáveis. Elétrons movimentando-se nestas órbitas não emitem energia na forma de radiação eletromagnética. Assim, a energia total do átomo permanece constante e a física clássica pode ser usada para descrever o movimento do elétron. Portanto, as órbitas estáveis são chamadas “estados estacionários”.
3. A radiação é emitida pelo átomo de hidrogênio quando um elétron “salta” de um estado inicial mais energético para um estado com menos energia (Figura 10.6). O “salto” não pode ser visualizado ou tratado classicamente. Em particular, a frequência f da radiação emitida no salto está relacionada com a variação na

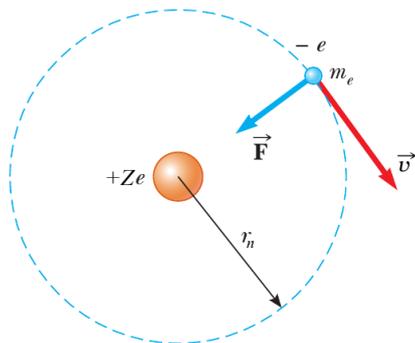


Figura 10.5 – Diagrama representando o modelo de Bohr. O elétron apenas movimentar-se em órbitas específicas com raios quantizados. ©Serway–Jewett

energia do átomo e é independente da frequência do movimento orbital do elétron. A frequência da radiação emitida é dada por

$$E_i - E_f = hf,$$

onde E_i é a energia do estado inicial, E_f é a energia do estado final, h é a constante de Planck, e $E_i > E_f$.

- O tamanho das órbitas eletrônicas permitidas é determinada pela condição imposta pelo momento angular orbital do elétron: as órbitas permitidas são aquelas para as quais o momento angular do elétron em torno do núcleo seja um múltiplo da quantidade $h/2\pi$, isto é:

$$L = m v r = n \frac{h}{2\pi},$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$, é chamado de número quântico principal. Cada valor de n corresponde a um valor permitido do raio orbital, que denotaremos por r_n , e uma correspondente velocidade v_n . Em outras palavras, o momento angular é quantizado, possuindo apenas valores dados pela expressão:

$$(10.2) \quad L_n = m v_n r_n = n \frac{h}{2\pi}.$$

Com estes quatro postulados, podemos calcular as energias dos estados permitidos e os comprimentos de onda emitidos pelo átomo de hidrogênio. Para isso utilizamos o modelo da Figura 10.7, no qual o elétron move-se numa órbita circular de raio r_n e com velocidade orbital v_n . A aceleração centrípeta produzida pela força elétrica de atração entre o elétron de carga negativa e o núcleo positivo é v_n^2/r_n . Esta força é dada pela lei de Coulomb,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)(e)}{r_n^2}.$$

A carga do núcleo é $+Ze$, onde Z é o número de cargas positivas¹ (prótons). Para o átomo de hidrogênio, $Z = +1$.

¹Incluindo o valor de Z nas derivações seguintes, podemos aplicar os resultados para outros átomos semelhantes ao hidrogênio, com um único elétron orbitando ao redor do núcleo, como é o caso

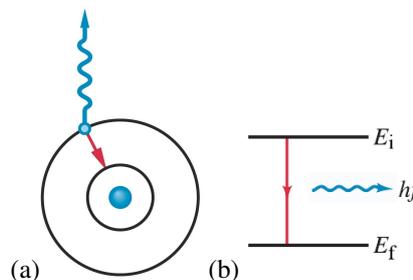


Figura 10.6 – (a) No modelo de Bohr, o elétron só irradia energia quando executa uma transição para uma órbita de raio menor, ou em outras palavras, (b) um átomo emite um fóton (energia = hf) quando sua energia muda de E_i para uma energia mais baixa E_f . ©Giancoli

Pela segunda lei de Newton, $F = ma$, e substituindo $a = v_n^2/r_n$, obtemos

$$F = ma$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}.$$

Isolando r_n e substituindo $v_n = nh/2\pi m_e r_n$ da Eq. 10.2, temos:

$$r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_n^2} = \frac{Ze^2 4\pi^2 m_e r_n^2}{4\pi\epsilon_0 n^2 h^2}.$$

Simplificando r_n , obtemos

$$(10.3) \quad r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e Z e^2}.$$

Esta expressão dá o raio de todas as órbitas possíveis. Para o hidrogênio ($Z = 1$), o menor raio orbital é obtido fazendo $n = 1$. Este raio mínimo é chamado de *raio de Bohr*, a_0 :

$$a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Dessa forma, para o átomo de hidrogênio podemos escrever a Eq. 10.3 como:

$$r_n = n^2 a_0.$$

Logo, as órbitas permitidas possuem raios $a_0, 4a_0, 9a_0, \dots$.

Para cada órbita permitida, o elétron possui uma energia definida. A energia total é igual à soma das energias cinética e potencial. A energia potencial do elétron é dada por $U = qV = -eV$, onde V é o potencial devido a uma carga pontual $+Ze$, dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r}.$$

Portanto,

$$U = -eV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}.$$

dos íons He^+ ($Z = 2$) e Li^{2+} ($Z = 3$).

A energia total E_n para um elétron na n -ésima órbita de raio r_n é a soma das energias cinética e potencial:

$$E_n = \frac{1}{2}m_e v_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

Substituindo v_n da Eq. 10.2 e r_n da Eq. 10.3, obtemos

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

Calculando o termo constante e convertendo-o em elétrons-volts, como é usual em física atômica, obtemos

$$E_n = -(13,6 \text{ eV}) \frac{Z^2}{n^2}$$

Para o hidrogênio ($Z = 1$), o nível de mais baixa energia ($n = 1$), que corresponde ao **estado fundamental**, é portanto

$$E_1 = -13,6 \text{ eV}$$

E para as demais órbitas, as energias podem ser obtidas por

$$E_n = -\frac{(13,6 \text{ eV})}{n^2}$$

Por exemplo,

$$E_2 = -\frac{(13,6 \text{ eV})}{4} = -3,40 \text{ eV}$$

$$E_3 = -\frac{(13,6 \text{ eV})}{9} = -1,51 \text{ eV}$$

Um diagrama de níveis de energia para estes estados estacionários e os correspondentes números quânticos é mostrado na Figura 10.7. O nível mais elevado mostrado nesta figura, que corresponde a $E = 0$ e $n \rightarrow \infty$, representa o estado para o qual o elétron é completamente removido do átomo. Neste estado, as energias cinética e potencial do elétron são ambas zero, o que significa que o elétron está em repouso, infinitamente distante do núcleo. A energia mínima necessária para ionizar o átomo, isto é, para remover o elétron, é chamada de **energia de ionização**, que para o hidrogênio possui o valor de 13,6 eV.

De acordo com o terceiro postulado de Bohr, quando um elétron salta de um estado inicial de energia E_i para um estado final de energia E_f , ele emite um fóton com frequência f dada por

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right),$$

onde $n_f < n_i$. Como $\lambda f = c$, podemos reescrever esta expressão como

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

Esta expressão pode ser diretamente comparada com a fórmula de Rydberg-Ritz (Eq. 10.1), de onde obtemos o valor

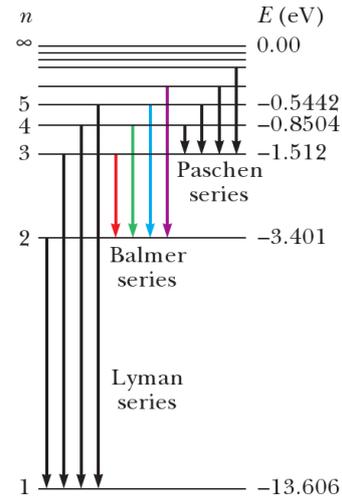


Figura 10.7 – Diagrama de níveis de energia para o hidrogênio. Números quânticos são dados à esquerda e as correspondentes energias (em elétrons-volts) são dadas à direita. As setas verticais representam as quatro transições de mais baixa energia para cada série espectral mostrada. As setas coloridas para a série de Balmer indicam que esta série resulta em luz visível. ©Serway–Jewett

para a constante de Rydberg para o átomo de hidrogênio ($Z = 1$):

$$R_H = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^3 c}$$

Substituindo as constantes para determinar o valor de R_H encontraremos exatamente o valor obtido experimentalmente por Rydberg. Este foi um dos principais reconhecimentos de que o modelo de Bohr realmente fazia sentido. Entretanto, a razão para a quantização dos níveis de energia em átomos e outros sistemas permaneceu um mistério até a descoberta da natureza ondulatória dos elétrons uma década mais tarde, como veremos no capítulo seguinte.

Princípio da correspondência

Devemos notar que Bohr fez algumas hipóteses radicais que iam contra as ideias clássicas. Ele assumiu que elétrons em órbitas fixas não emitem luz, mesmo que estejam acelerados (movendo-se num círculo), e assumiu que o momento angular era quantizado. Além disso, não foi capaz de dizer como um elétron movia-se quando fazia a transição de um nível de energia para outro. Por outro lado, não há qualquer razão para esperarmos que no mundo subatômico os elétrons se comportem como objetos do mundo macroscópico. Todavia, a teoria quântica deve ser equivalente à física clássica quando as diferenças de energia entre os níveis quânticos são muito pequenas. Em outras palavras, no mundo macroscópico a quantização não deve ser importante e os cálculos quânticos e clássicos devem conduzir aos mesmos resultados. Este é o chamado **princípio da correspondência**.

Por exemplo, considere o átomo de hidrogênio com $n = 10000$. Para valores grandes de n , as diferenças de energia entre níveis próximos aproximam-se de zero e os níveis são aproximadamente contínuos. Como consequência, os cálculos clássicos podem ser utilizados para descrever um

sistema para grandes valores de n . De acordo com o modelo clássico, a frequência da luz emitida pelo átomo é igual à frequência orbital do elétron em torno do núcleo. Cálculos mostram que para $n = 10000$, esta frequência difere da prevista pela física quântica por menos que 0,015%.

Finalmente, é importante enfatizar que as órbitas bem definidas do modelo de Bohr não existem na realidade. O modelo de Bohr é apenas um modelo, não é real. A ideia das órbitas eletrônicas foi rejeitada anos mais tarde, e hoje os elétrons nos átomos formam “nuvens de probabilidade”, de acordo com a mecânica quântica.

11.1 PROPRIEDADES ONDULATÓRIAS DAS PARTÍCULAS: A HIPÓTESE DE DE BROGLIE

Um dos maiores avanços em nossa compreensão sobre a estrutura dos átomos surgiu com uma hipótese audaciosa feita por um físico francês, Louis-Victor de Broglie (1892–1987), em sua tese de doutorado, publicada em 1924. Seguindo a ideia de que a *natureza ama a simetria*, de Broglie argumentou que se a luz se comporta como onda e partícula, esta dualidade também deveria ocorrer para a matéria. Segundo de Broglie, elétrons e prótons, que usualmente pensamos como partículas, poderiam, em muitas situações, comportarem-se como ondas.

Se uma partícula atua como uma onda, ela deve ter um certo comprimento de onda e frequência. Sendo assim, de Broglie postulou que uma partícula livre com massa de repouso m , movendo-se com velocidade não-relativística v , deveria ter um comprimento de onda λ relacionado com seu momento $p = mv$ de forma similar ao fóton, $\lambda = h/p$. O **comprimento de onda de de Broglie** de uma partícula é então dado por:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

onde h é a constante de Planck. A frequência f , de acordo com de Broglie, também é relacionada com a energia da partícula E da mesma forma que para o fóton, ou seja

$$E = hf.$$

Assim, as relações entre comprimento de onda e momento e entre frequência e energia na hipótese de de Broglie são exatamente as mesmas para partículas de matéria e para os fótons.

Para entendermos o significado científico da hipótese feita por de Broglie, temos que recordar que naquela época não existia qualquer evidência experimental para um comportamento ondulatório das partículas. Uma coisa é sugerir uma nova hipótese para explicar observações experimentais. Outra coisa é propor uma ideia completamente nova e radical baseada apenas numa fundamentação teórica, como fez de Broglie. O sucesso limitado na compreensão da estrutura atômica, parcialmente obtido por Bohr, indicava que uma revolução era necessária na mecânica das partículas.

A hipótese de de Broglie foi justamente o início dessa revolução. Poucos anos depois da publicação do seu trabalho, uma teoria mais detalhada chamada mecânica quântica foi desenvolvida por Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Born, entre outros, mesmo sem evidências experimentais diretas para as propriedades ondulatórias das partículas.

O experimento de Davisson–Germer

A proposta de de Broglie de que a matéria possui ambos comportamentos de onda e partícula foi inicialmente tratada como mera especulação. Se partículas de matéria, como os elétrons tivessem propriedades ondulatórias, então, sob determinadas condições, eles deveriam exibir efeitos de difração. Em 1927, três anos após a publicação do trabalho de de Broglie, os americanos C. J. Davisson (1881–1958) e L. H. Germer (1896–1971) conseguiram medir o comprimento de onda dos elétrons com êxito. Esta descoberta foi a primeira confirmação experimental das ondas de matéria propostas por de Broglie.

O objetivo inicial do experimento de Davisson–Germer não era confirmar a hipótese de de Broglie. De fato, essa descoberta foi acidental! O experimento consistia do espalhamento de elétrons de baixa energia (cerca de 54 eV) lançados em direção a um alvo de níquel no vácuo. Durante o experimento, um acidente danificou o sistema de vácuo causando a oxidação da superfície de níquel. Após o alvo de níquel ser aquecido para remover o revestimento de óxido, eles repetiram o experimento e notaram que os elétrons espalhados exibiam máximos e mínimos de intensidade a ângulos específicos. Davisson e Germer finalmente perceberam que regiões cristalinas haviam se formado no níquel quando o aqueceram, e que os planos regularmente espaçados de átomos nos cristais funcionavam como uma rede de difração para os elétrons.

Logo em seguida, Davisson e Germer realizaram mais medições extensivas da difração de elétrons espalhados a partir de alvos de um único cristal. Seus resultados mostraram conclusivamente a natureza ondulatória dos elétrons e confirmaram a relação de de Broglie, $\lambda = h/p$. Um ano depois, em 1928, o escocês G. P. Thomson (1892–1975) observou padrões de difração de elétrons ao passar elétrons através de folhas muito finas de ouro. Desde então, padrões de difração têm sido observados para átomos de hélio, átomos de hidrogênio e nêutrons. Portanto, a característica universal da natureza ondulatória das partículas de matéria foi estabelecida de várias formas. Na [Figura 11.1](#) é mostrada uma comparação entre os padrões de difração produzidos por raios-X e por elétrons.

11.2 O ÁTOMO E A HIPÓTESE DE DE BROGLIE

A teoria atômica de Bohr foi desenvolvida de tal forma que os postulados assumidos concordassem com os experimentos. Mas Bohr não podia explicar por que as órbitas eram quantizadas, nem por que deveria haver um estado fundamental de mais baixa energia. Finalmente, dez anos depois, a teoria de ondas de matéria de de Broglie obteve tais explicações.

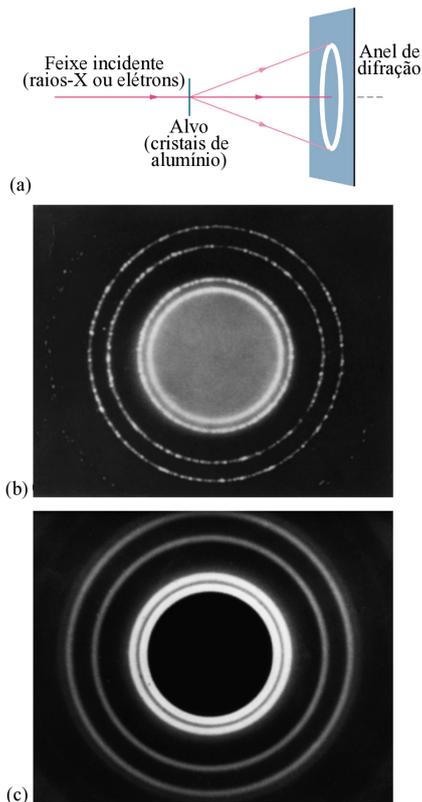


Figura 11.1 – (a) Montagem experimental usada para demonstrar, por técnicas de difração, o caráter ondulatório do feixe incidente. As fotografias mostram os padrões de difração obtidas (b) com um feixe de raios-X (ondas eletromagnéticas) e (c) com um feixe de elétrons (ondas de matéria). Note que as duas são muito parecidas. ©Halliday

Um dos argumentos originais de de Broglie a favor da natureza ondulatória dos elétrons foi que ela explicava a teoria de Bohr para o átomo de hidrogênio. De acordo com de Broglie, uma partícula de massa m movendo-se com velocidade não-relativística v deveria ter um comprimento de onda de

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Cada órbita eletrônica em um átomo, segundo de Broglie, é na verdade uma onda estacionária. Com os elétrons movendo-se em círculos, de acordo com a teoria de Bohr, de Broglie propôs que a onda associada ao movimento de um elétron era uma onda estacionária circular fechada em si mesmo (ver Figura 11.2). A circunferência de uma órbita de Bohr de raio r_n é $2\pi r_n$, de forma que para uma onda estacionária temos que

$$2\pi r_n = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo $\lambda = h/mv$, obtemos $2\pi r_n = nh/mv$, ou

$$mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$$

Esta é exatamente a condição quântica proposta por Bohr. Portanto temos uma primeira explicação para as órbitas

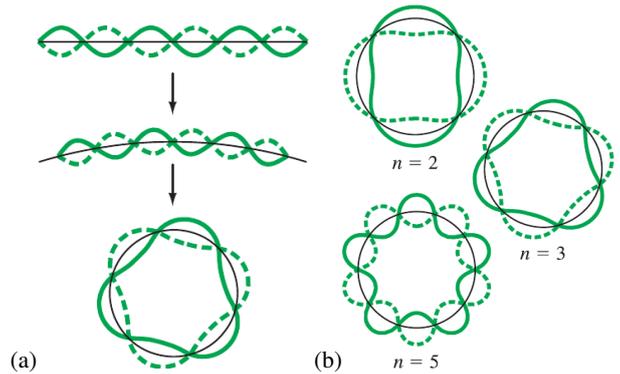


Figura 11.2 – (a) Uma onda estacionária convencional comparada com uma onda estacionária circular. (b) Ondas estacionárias circulares para dois, três e cinco comprimentos de onda em uma circunferência; n , o número de comprimentos de onda, é chamado de número quântico. ©Giancoli

quantizadas e o níveis de energia no modelo de Bohr: elas são originadas devido à natureza ondulatória do elétron. Isto implica que a dualidade onda-partícula para a matéria está presente nas raízes da estrutura atômica.

A teoria atômica de Bohr nos deu uma primeira ideia de como são os átomos. Ela funciona bem para o átomo de hidrogênio e para íons com apenas um elétron. Mas ela falha mesmo para átomos simples com mais de um elétron, como o átomo de hélio, e é completamente incapaz de prever o espectro para átomos complexos. O modelo de Bohr também não explica por que algumas linhas espectrais são mais brilhantes que outras, nem a ligação de átomos em moléculas ou em sólidos e líquidos. Do ponto de vista teórico, a teoria de Bohr também não era satisfatória: era uma mistura de ideias clássicas e quânticas. Além disso, a dualidade onda-partícula não era bem resolvida.

Todas estas limitações apontavam para uma mesma direção: a necessidade do desenvolvimento de uma nova teoria mais completa. Esta teoria foi desenvolvida a partir de 1925, cerca de dois anos após o trabalho de de Broglie, de forma independente por Erwin Schrödinger (1887–1961) e Werner Heisenberg (1901–1976), que estenderam a teoria inicialmente proposta por de Broglie. Esta nova e radical teoria é chamada de **mecânica quântica**. Ela finalmente resolveu o problema da estrutura atômica apresentando-nos uma nova visão do átomo: a ideia de elétrons em órbitas bem definidas foi substituída pela ideia de nuvens de elétrons.

11.3 A MECÂNICA QUÂNTICA: UMA NOVA TEORIA

A mecânica quântica tem sido extremamente bem sucedida. Ela unifica a dualidade onda-partícula em uma única teoria consistente e tem obtido resultados excelentes para espectros emitidos por átomos complexos, mesmo nos mínimos detalhes. Ela explica o brilho relativo das linhas espectrais e como átomos formam moléculas. Além disso, ela também é uma teoria bem mais geral que engloba todos os fenômenos quânticos, desde a radiação de corpo-negro

até átomos e moléculas. Atualmente é uma teoria bem estabelecida e aceita pela grande maioria dos físicos como uma teoria fundamental da natureza.

O reino da mecânica quântica é o mundo microscópico dos átomos e da luz. Mas esta nova teoria, quando aplicada aos fenômenos macroscópicos, deve produzir os mesmos resultados das leis clássicas. Este é o princípio da correspondência, que é satisfeito pela mecânica quântica. No nosso cotidiano é muito mais fácil aplicar as leis clássicas, como as leis de Newton, que dão resultados suficientemente precisos. No entanto, quando analisamos fenômenos a velocidades próximas a da luz, devemos utilizar a teoria da relatividade. De forma similar, quando analisamos fenômenos que ocorrem em escalas microscópicas, devemos usar a mecânica quântica.

Aqui não vamos tratar dos detalhes matemáticos da mecânica quântica, mas discutiremos suas principais ideias e como ela envolve as propriedades de onda e partícula da matéria para explicar a estrutura atômica, por exemplo.

11.4 A FUNÇÃO DE ONDA E SUA INTERPRETAÇÃO

As propriedades mais importantes de uma onda são seu comprimento de onda, frequência e amplitude. Para uma onda eletromagnética, a frequência (ou comprimento de onda) determina se a luz é visível ou não, e se sim, qual sua cor. Também vimos que a frequência é uma medida da energia do fóton associado com a onda eletromagnética ($E = hf$). A amplitude ou deslocamento de uma onda eletromagnética em qualquer ponto do espaço é a intensidade do campo elétrico (ou magnético) naquele ponto, e está relacionada com a intensidade da onda (o brilho da luz).

Para partículas de matéria como os elétrons, a mecânica quântica relaciona seu comprimento de onda com o momento de acordo com a relação de de Broglie, $\lambda = h/p$. Mas qual é a amplitude de uma onda de matéria? A amplitude de uma onda eletromagnética é representada pelos campos elétrico e magnético, E e B . Na mecânica quântica, este papel é desempenhado pela **função de onda**, representada pelo símbolo Ψ . Assim, Ψ representa o deslocamento da onda, em função do tempo e da posição, de uma nova espécie de campo que poderíamos chamar de campo de matéria ou simplesmente uma onda de matéria.

Para entender como interpretar a função de onda Ψ , vamos fazer uma analogia com a luz usando a dualidade onda-partícula.

Vimos no Capítulo 6 que a intensidade I de uma onda eletromagnética é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico E , isto é,

$$I \propto E^2.$$

Do ponto de vista de uma partícula, a intensidade de um feixe de luz (de uma dada frequência) é proporcional ao número de fótons, N , que passa através de uma dada área por unidade de tempo. Quanto maior o número de fótons, maior é a

intensidade. Assim

$$I \propto E^2 \propto N.$$

Esta proporcionalidade pode ser invertida de tal forma que

$$N \propto E^2.$$

Isto é, o número de fótons é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico.

Se o feixe de luz é muito fraco, apenas poucos fótons serão emitidos. De fato, é possível construir uma fotografia em uma câmera usando luz muito fraca tal que o efeito de fótons individuais podem ser vistos.

Se tratamos apenas de um fóton, a relação acima ($N \propto E^2$) pode ser interpretada de uma outra maneira. Em qualquer ponto, o quadrado do campo elétrico, E^2 , é uma medida da *probabilidade* se de encontrar um fóton naquela posição. Em pontos onde E^2 é grande, há uma alta probabilidade de se ter um fóton localizado naqueles pontos; onde E^2 é pequeno, a probabilidade é menor.

Podemos interpretar as ondas de matéria da mesma forma, conforme foi sugerido por Max Born (1882–1970) em 1927. A função de onda Ψ pode variar em magnitude em cada ponto no espaço e no tempo. Se Ψ descreve um conjunto de vários elétrons, então $|\Psi|^2$ em cada ponto será proporcional ao número esperado de elétrons que são encontrados naquele ponto. Quando consideramos um pequeno número de elétrons, não podemos fazer previsões exatas, já que $|\Psi|^2$ comporta-se como uma probabilidade. Se Ψ , que depende do tempo e da posição, representa um único elétron (digamos, em um átomo), então $|\Psi|^2$ pode ser interpretada da seguinte maneira: *$|\Psi|^2$ em um certo ponto no espaço e no tempo representa a probabilidade de se encontrar um elétron naquela dada posição e tempo.* Assim, $|\Psi|^2$ é frequentemente chamada **densidade de probabilidade** ou **distribuição de probabilidade**.

O experimento de fenda dupla para elétrons

Para entender isto melhor, vamos imaginar um experimento já conhecido, o experimento de fenda dupla, tanto para a luz como para elétrons.

Considere duas fendas cujos tamanhos e separações são da ordem do comprimento de onda incidente sobre elas, seja da luz ou dos elétrons. Sabemos muito bem o que vai acontecer no caso da luz, descrito no experimento de Young (Capítulo 7): um padrão de interferência será visto na tela detectora. Se a luz for substituída por elétrons com comprimentos de onda comparáveis ao tamanho das fendas, eles também produzirão um padrão de interferência. No caso da luz, o padrão poderia ser observado diretamente ou então ser gravado sobre uma película de filme. Para os elétrons, uma tela fluorescente poderia ser utilizada (o impacto de um elétron sobre a tela a faria brilhar).

Se reduzimos o fluxo de elétrons (ou fótons) tal que eles passem através das fendas um de cada vez, observaremos um ponto brilhante cada vez que um elétron atingisse a tela

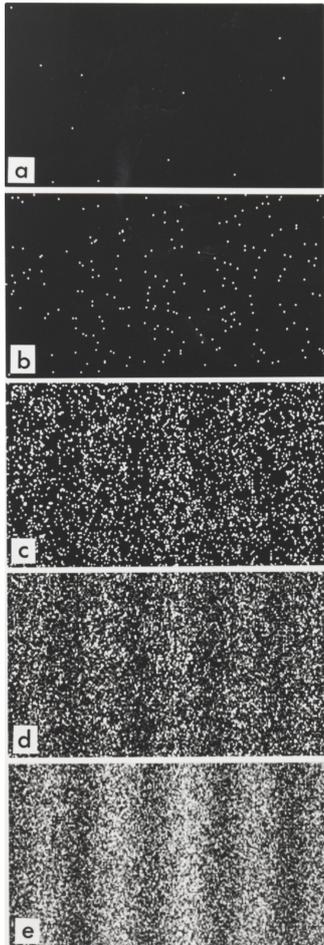


Figura 11.3 – Resultados de um experimento de fenda dupla realizado pelo Dr. Akira Tonomura mostrando a formação de um padrão de interferência de elétrons. Número de elétrons em cada imagem: (a) 10, (b) 200, (c) 6000, (d) 40000, (e) 140000.

fluorescente. No início, os pontos brilhantes apareceriam distribuídos de forma aleatória. De fato, não há como prever onde um único elétron atingirá a tela. Se deixamos o experimento correr por um longo período, e anotarmos onde cada elétron atinge a tela, observaríamos a formação de um padrão — o padrão de interferência previsto pela teoria ondulatória. Assim, embora não pudéssemos prever onde um dado elétron atingiria a tela, podemos prever probabilidades. (O mesmo vale para os fótons.) A probabilidade, como mencionado anteriormente, é proporcional a $|\Psi|^2$. Onde $|\Psi|^2$ é zero, observaremos um mínimo no padrão de interferência. E onde $|\Psi|^2$ é máximo, observaremos um pico no padrão de interferência.

O padrão de interferência ocorreria mesmo quando elétrons (ou fótons) passassem através das fendas um de cada vez. Assim, o padrão de interferência não poderia surgir da interação de um elétron com outro. É como se um elétron passasse através de ambas as fendas ao mesmo tempo, interferindo com ele mesmo. Isto é possível porque um elétron não é exatamente uma partícula. Ele é tanto uma onda como uma partícula, e sendo uma onda ele pode atravessar ambas as fendas ao mesmo tempo. Mas o que

aconteceria se cobríssemos uma das fendas de forma que saberíamos que o elétron passaria através da outra fenda, e em seguida cobríssemos a segunda fenda fazendo-o passar pela primeira? O resultado seria que nenhum padrão de interferência seria observado. Ao invés disso, observaríamos duas faixas brilhantes (ou padrões de difração) na tela. Isto confirma nossa ideia de que se ambas as fendas estão abertas, a tela mostra um padrão de interferência como se cada elétron passasse através de ambas as fendas, como uma onda. Mas mesmo assim cada elétron causaria um pequeno ponto brilhante na tela como se fosse uma partícula.

O ponto principal dessa discussão é o seguinte: se tratamos os elétrons (e outras partículas) como se eles fossem ondas, então Ψ representa a amplitude da onda; se tratamos os elétrons como partículas, então devemos considerá-los de uma forma probabilística. O quadrado da função de onda, $|\Psi|^2$, dá a probabilidade de se encontrar um dado elétron num dado ponto. Não podemos prever a trajetória de um único elétron com precisão no espaço e no tempo.

11.5 PRINCÍPIO DA INCERTEZA

Sempre que se mede a posição ou a velocidade de uma partícula em um certo instante, incertezas experimentais estão incluídas nas medidas. De acordo com a mecânica clássica, não há barreira fundamental para o aperfeiçoamento mais refinado do aparelho ou dos procedimentos experimentais. Em outras palavras, é possível, a princípio, realizar tais medidas com uma incerteza arbitrariamente pequena. Porém, a teoria quântica prevê que **é fundamentalmente impossível medir simultaneamente a posição e o momento de uma partícula com exatidão infinita.**

Em 1927, Werner Heisenberg introduziu esta noção, que é conhecida hoje em dia como o princípio da incerteza de Heisenberg:

Se é feita uma medida da posição de uma partícula com uma incerteza Δx e uma medida simultânea do seu momento com uma incerteza Δp_x , o produto das duas incertezas nunca pode ser menor do que $\hbar = h/2\pi$:

$$(11.1) \quad \Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar.$$

Heisenberg foi cuidadoso ao apontar que as incertezas inevitáveis Δx e Δp_x não surgem de imperfeições nos instrumentos práticos de medidas. Em vez disso, as incertezas surgem da estrutura quântica da matéria.

O princípio da incerteza, algumas vezes chamado princípio da indeterminação, nos diz que não podemos medir ambas a posição e o momento de um objeto com exatidão ao mesmo tempo. Quanto mais preciso medimos a posição tal que Δx é pequeno, maior será a incerteza no momento, Δp_x , e vice-versa. No entanto, este princípio não impede medidas individuais precisas. Por exemplo, podemos medir a posição de um objeto com exatidão. Mas então seu momento seria

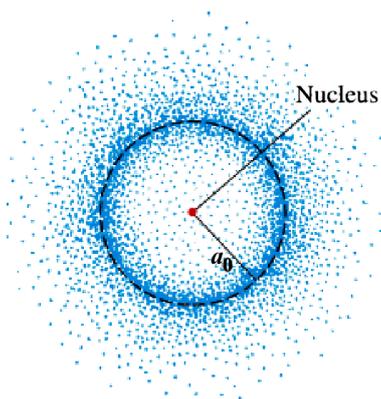


Figura 11.4 – Distribuição de probabilidade radial para o estado fundamental do átomo de hidrogênio. A densidade de pontos mostra o raio onde é mais provável encontrar um elétron, que corresponde exatamente ao raio de Bohr, a_0 . ©Giancoli

completamente desconhecido. Assim, embora possamos saber a posição de um objeto exatamente num dado instante, não teríamos a menor ideia sobre seu momento.

Uma outra forma útil do princípio da incerteza relaciona energia e tempo:

$$(11.2) \quad \Delta E \Delta t \gtrsim \hbar.$$

Esta expressão nos diz que a energia de um objeto pode ser incerta por uma quantidade ΔE para um tempo $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$. Esta forma do princípio da incerteza sugere que podemos violar a conservação da energia por um valor ΔE desde que o façamos apenas por um curto intervalo de tempo Δt .

Discutimos a determinação da posição e da velocidade de um elétron como se ele fosse uma partícula. No entanto, ele não é somente uma partícula. O princípio da incerteza existe porque um elétron — e a matéria em geral — possui propriedades de onda assim como de partícula. O que o princípio da incerteza realmente nos diz é que se insistimos em pensar que o elétron é uma partícula, então existem certas limitações para esta visão simplificada, ou seja, a posição e a velocidade (ou momento) não podem ser ambas determinadas com exatidão ao mesmo tempo. Da mesma forma, a energia pode ter uma incerteza ΔE para um intervalo de tempo $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$.

Como a constante de Planck, h , é muito pequena, as incertezas expressas no princípio da incerteza de Heisenberg são negligíveis no mundo macroscópico. Mas no nível atômico, as incertezas são significantes. Já que consideramos objetos comuns como sendo feitos de átomos, que por sua vez contêm núcleos e elétrons, o princípio da incerteza é relevante para nossa compreensão de toda Natureza. Este princípio expressa, talvez mais claramente, o caráter probabilístico da mecânica quântica.

11.6 VISÃO DOS ÁTOMOS NA MECÂNICA QUÂNTICA

No capítulo anterior, discutimos que apesar do sucesso do modelo de Bohr em prever o espectro atômico para átomos simples, ele possui uma série de limitações. A teoria da mecânica quântica aplicada aos átomos é muito mais completa que o modelo de Bohr. Apesar de que a teoria atômica proposta por Bohr ter sido deixada de lado, a mecânica quântica comprova certos aspectos daquela teoria, por exemplo, mostrando que os elétrons nos átomos existem apenas em estados discretos de energia e que um fóton de luz é emitido (ou absorvido) quando um elétron faz uma transição de um estado para outro. Mas a mecânica quântica é uma teoria muito mais profunda, e possibilitou a descoberta de uma nova visão acerca dos átomos. De acordo com esta teoria, os elétrons não existem em órbitas bem definidas em torno dos núcleos conforme postulado no modelo de Bohr. Ao invés disso, os elétrons (devido à sua natureza ondulatória) podem ser imaginados como sendo espalhados no espaço formando “nuvens eletrônicas”. O tamanho e a forma destas nuvens podem ser calculados para um dado estado de um átomo. Para o estado fundamental do átomo de hidrogênio, a nuvem de elétrons é esfericamente simétrica, conforme mostrado na [Figura 11.4](#).

A nuvem eletrônica pode ser interpretada tanto através do ponto de vista de partículas ou como de ondas. Lembrando que por partículas queremos dizer um objeto que está localizado no espaço, ou seja, que possui uma posição definida num dado instante de tempo. Por outro lado, uma onda espalha-se no espaço, com uma certa amplitude e frequência. A nuvem eletrônica espalhada mostrada na [Figura 11.4](#) é um resultado da natureza ondulatória dos elétrons. Por outro lado, as nuvens de elétrons também podem ser interpretadas como **distribuições de probabilidade** para uma partícula. Se medimos a posição de um elétron num átomo de hidrogênio em 500 instantes diferentes de tempo, a maioria dos resultados mostrará o elétron em pontos onde a probabilidade é alta (regiões mais escuras na [Figura 11.4](#)). Apenas ocasionalmente o elétron seria encontrado onde a probabilidade é mais baixa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- HALLIDAY, RESNICK, WALKER, Fundamentos de Física 3 e 4, 8ª edição, LTC, Rio de Janeiro, 2009.
- SERWAY, JEWETT, Princípios de Física, volume 3 e 4, 3ª edição, Cengage Learning, São Paulo, 2009.
- RESNICK, HALLIDAY, KRANE, Física 3 e 4, 4ª edição, LTC, Rio de Janeiro, 1996.
- TIPLER, MOSCA, Física para cientistas e engenheiros, volume 2, 6ª edição, LTC, Rio de Janeiro, 2009.
- TIPLER, LLEWELLYN, Física Moderna, 3ª edição, LTC, Rio de Janeiro, 2006.
- GIANCOLI, Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, 4th edition, Pearson Education, 2009.