

# Pêndulo Duplo e Pêndulo Impulsionado em HTML5 e JavaScript

Jelther Gonçalves

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Universidade Estadual de Campinas

Curso de Matemática Aplicada e Computacional

E-mail: [jetolgon@gmail.com](mailto:jetolgon@gmail.com)

26 de Fevereiro de 2014

## **Resumo**

Este trabalho visa fornecer uma simulação computacional do pêndulo duplo e do pêndulo impulsionado em seu pivô.

As simulações são construídas utilizando a tecnologia HTML5 e Javascript, facilitando sua visualização em diferentes dispositivos e plataformas sem a necessidade de componentes extras.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Pêndulo Impulsionado</b>	<b>2</b>
1.1	Dedução das equações . . . . .	2
1.2	Adequando para o método de Runge-Kutta de 4ª Ordem . . . . .	5
1.3	Mudança do ponto estável . . . . .	7
1.4	Movimento caótico do pêndulo impulsionado . . . . .	10
<b>2</b>	<b>O Pêndulo Duplo</b>	<b>12</b>
2.1	Dedução das equações . . . . .	12
2.2	Adequando para o método de Runge-Kutta de 4ª Ordem . . . . .	15
2.3	Movimento caótico do pêndulo duplo . . . . .	17
	<b>Conclusões</b>	<b>20</b>
	<b>Apêndice A - Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem</b>	<b>21</b>
	Apresentação . . . . .	21
	Generalizando para várias variáveis . . . . .	22
	<b>Apêndice B – Frameworks Utilizados</b>	<b>23</b>
	<b>Apêndice C – Links para as simulações</b>	<b>24</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>25</b>

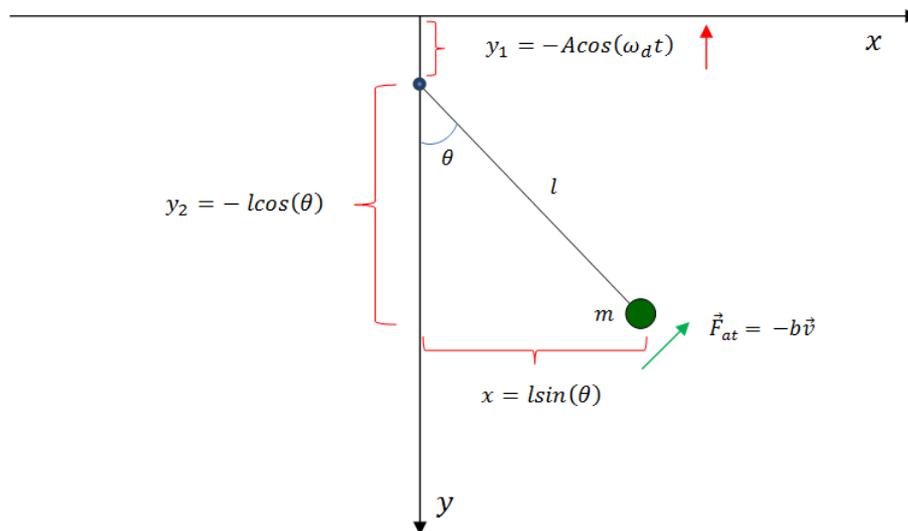
# Capítulo 1

## Pêndulo Impulsionado

### 1.1 Dedução das equações

Um pêndulo é um sistema composto por uma massa acoplada a um pivô que permite sua movimentação livremente.

No pêndulo impulsionado, partiremos do princípio que o pivô irá se mover de forma oscilatória verticalmente ou horizontalmente. Vamos iniciar com o pêndulo impulsionado verticalmente:



No esquema acima utilizamos  $x$  e  $y$  como coordenadas generalizadas para o pêndulo. Como podemos ver, o pivô se move verticalmente em função de um cosseno e uma amplitude.

Para obtermos a equação do movimento, devemos utilizar os conceitos de mecânica lagrangiana. Ou seja, devemos ter  $L = T - U$ , onde  $T$  é a soma das energias cinéticas e  $U$  a soma das energias potenciais do sistema. Portanto,  $T$  fica:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Onde o ponto denota a derivada temporal. Os valores  $x$  e  $y$  serão as somas dos encontrados no esquema acima, então:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= -l\dot{\theta} \sin \theta - A\omega_d \sin(\omega_d t) \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + A^2\omega_d^2 \sin^2(\omega_d t) + 2l\dot{\theta}A\omega_d \sin(\omega_d t)\end{aligned}$$

Simplificando esta última, obteremos  $T$ :

$$T = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + A^2\omega_d^2 \sin^2(\omega_d t) + 2l\dot{\theta}A\omega_d \sin(\omega_d t))$$

O próximo passo é encontrar a energia potencial  $U$ :

$$U = -mgy = -mg(l \cos \theta + A \cos(\omega_d t))$$

Portanto, a Lagrangiana será:

$$L = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + A^2\omega_d^2 \sin^2(\omega_d t) + 2l\dot{\theta}A\omega_d \sin(\omega_d t)) + mg(l \cos \theta + A \cos(\omega_d t))$$

Vamos notar que existe uma força de atrito proporcional a velocidade da esfera. Esta força pode ser generalizada da seguinte forma:

$$Q_\theta = F_{atx} \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_{aty} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Portanto, vamos encontrar  $F_{atx}$  e  $F_{aty}$ :

$$\begin{aligned} F_{atx} &= -b\dot{x} = -bl \cos \theta \dot{\theta} \\ F_{aty} &= -b\dot{y} = -bl \sin \theta \dot{\theta} + Ab\omega_d \sin(\omega_d t) \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= l \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = l \sin \theta \end{aligned}$$

Então,  $Q_\theta$  fica:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= -b\dot{\theta}l^2 \cos^2 \theta - b\dot{\theta}l^2 \sin^2 \theta + Abl\omega_d \sin \theta \sin(\omega_d t) \\ Q_\theta &= -b\dot{\theta}l^2 + Abl\omega_d \sin \theta \sin(\omega_d t) \end{aligned}$$

Finalmente, podemos determinar a equação de  $\dot{\theta}$  a partir da definição da Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q_\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2 \dot{\theta} + mlA\omega_d \sin \theta \sin(\omega_d t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml^2 \ddot{\theta} + mlA\omega_d \dot{\theta} \cos \theta \sin(\omega_d t) + mlA\omega_d^2 \sin \theta \cos(\omega_d t) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mlA\omega_d \dot{\theta} \cos \theta \sin(\omega_d t) - mgl \sin \theta \end{aligned}$$

Chegamos então em:

$$\ddot{\theta} = -\sin \theta \left[ \frac{A\omega_d^2 \cos(\omega_d t) + g}{l} \right] + \frac{Q_\theta}{ml^2}$$

Esta equação é a que descreve o movimento da massa ao redor do pivô.

## 1.2 Adequando para o método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Claramente, a equação do movimento não possui uma solução analítica. Para resolver esta equação, devemos utilizar um método numérico.

O método utilizado para o desenvolvimento do applet é o de Runge-Kutta de 4ª Ordem. No apêndice A descrevemos como o método funciona para casos gerais.

Realizando uma mudança de variáveis ficamos com o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\sin \theta \left[ \frac{A\omega_d^2 \cos(\omega_d t) + g}{l} \right] + \frac{1}{ml^2} (-bl^2\omega + Abl\omega_d \sin \theta \sin(\omega_d t)) \\ t = 1 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \dot{\theta} = f(t, \theta, \omega) \\ \dot{\omega} = g(t, \theta, \omega) \\ t = l(t, \theta, \omega) \end{cases}$$

Onde  $f, g$  e  $k$  são as funções acima representadas. Utilizaremos parâmetros extras ao escrever as funções (como  $t$  para função  $f$ ) para que não haja confusão na construção do método numérico.

Portanto, a implementação em Javascript do método numérico é:

```
1 function f(tempo,theta,vel_angular) {
2     temp = -(gravidade + Amp*omegad*omegad*Math.cos(omegad*tempo))*Math.sin(
3         theta);
4     temp = temp/(comprimento_pendulo1);
5     temp = temp -((b_damping/massa1)*vel_angular) + (Amp*b_damping*omegad*Math.
6         sin(theta)*Math.sin(omegad*tempo))/(massa1*comprimento_pendulo1);
7     return temp;
8 }
9
10 function g(tempo,theta,vel_angular) {
11     return vel_angular;
12 }
13
14 function k(tempo,theta,vel_angular) {
15     return 1;
16 }
17
18 function rungeKuttaPendulo(timediff) {
19     var h = timediff/1000;
20     var a = [];
21     var b = [];
22     var c = [];
23     var d = [];
24
25     a[1] = g(tempo_n, theta_n_1 , vel_angular_n_1);
26     a[2] = f(tempo_n, theta_n_1 , vel_angular_n_1);
27     a[3] = k(tempo_n, theta_n_1 , vel_angular_n_1);
28
29     b[1] = g(tempo_n + (h/2)*a[3] , theta_n_1 + (h/2)*a[1] , vel_angular_n_1 + (
30         h/2)*a[2] );
31     b[2] = f(tempo_n + (h/2)*a[3] , theta_n_1 + (h/2)*a[1] , vel_angular_n_1 + (
32         h/2)*a[2] );
33     b[3] = k(tempo_n + (h/2)*a[3] , theta_n_1 + (h/2)*a[1] , vel_angular_n_1 + (
34         h/2)*a[2] );
35
36     c[1] = g(tempo_n + (h/2)*b[3] , theta_n_1 + (h/2)*b[1] , vel_angular_n_1 + (
37         h/2)*b[2] );
38     c[2] = f(tempo_n + (h/2)*b[3] , theta_n_1 + (h/2)*b[1] , vel_angular_n_1 + (
39         h/2)*b[2] );
40     c[3] = k(tempo_n + (h/2)*b[3] , theta_n_1 + (h/2)*b[1] , vel_angular_n_1 + (
41         h/2)*b[2] );
42
43     d[1] = g(tempo_n + h*c[3] , theta_n_1 + h*c[1] , vel_angular_n_1 + h*c[2] );
44     d[2] = f(tempo_n + h*c[3] , theta_n_1 + h*c[1] , vel_angular_n_1 + h*c[2] );
45     d[3] = k(tempo_n + h*c[3] , theta_n_1 + h*c[1] , vel_angular_n_1 + h*c[2] );
46
47     theta_n_1 = theta_n_1 + (h/6)*(a[1] + 2*b[1] + 2*c[1] + d[1]);
48     vel_angular_n_1 = vel_angular_n_1 + (h/6)*(a[2] + 2*b[2] + 2*c[2] + d[2]);
49     tempo_n = tempo_n + (h/6)*(a[3] + 2*b[3] + 2*c[3] + d[3]);
50
51     delete a;delete b;delete c;delete d;
52 }
```

### 1.3 Mudança do ponto estável

Podemos perceber (experimentalmente) que o pêndulo muda seu comportamento quando escolhemos ângulos iniciais diferentes.

A mudança principal é o seu ponto estável : quando colocado a partir de um ângulo o mesmo fica estável acima do eixo Y.

Vamos tomar como exemplo os valores :

Massa = 13 Kg  
Coef. Amortecimento = 1 Kg/s  
Vel. Angular Inicial = 0 rad/s  
Frequência de Vibração = 5 Hz  
Amplitude do Impulso = 0.3 m  
Comprimento do Pêndulo = 3 m  
Gravidade = 9.8 m/s<sup>2</sup>

Com estes valores, vemos que o pêndulo se mantém estável na vertical a partir de  $\pm 136^\circ = \pm 2.374 \text{ rad}$  em relação ao eixo Y.

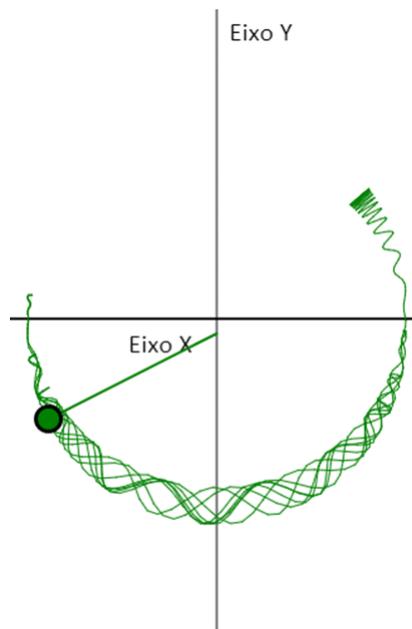


Figura 1: Traço do pêndulo após 14s de movimento em um ângulo inicial de  $135^\circ$

### Tempo decorrido em segundos no eixo X pelo Ângulo com a vertical feito pelo pêndulo em Y

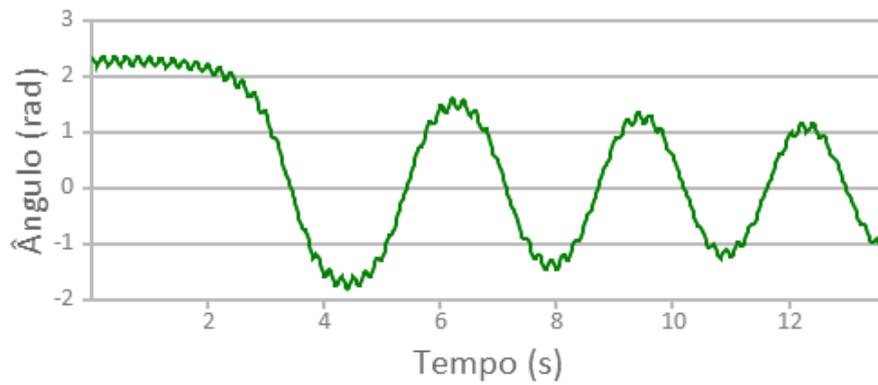


Figura 2: Gráfico do pêndulo após 14s de movimento em um ângulo inicial de  $135^\circ$

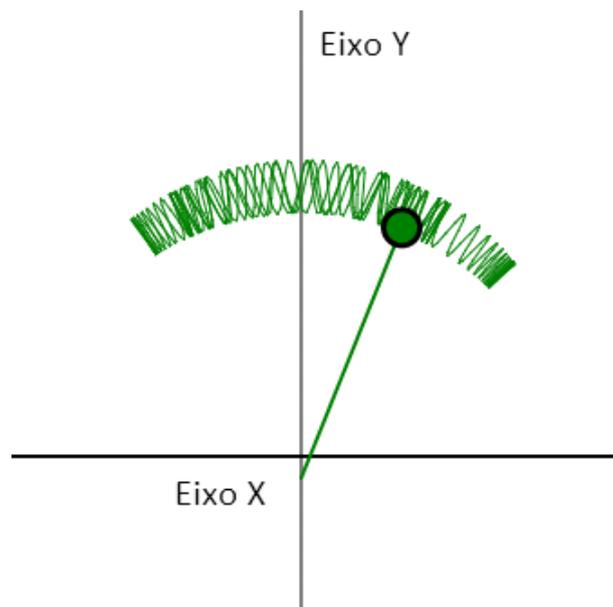
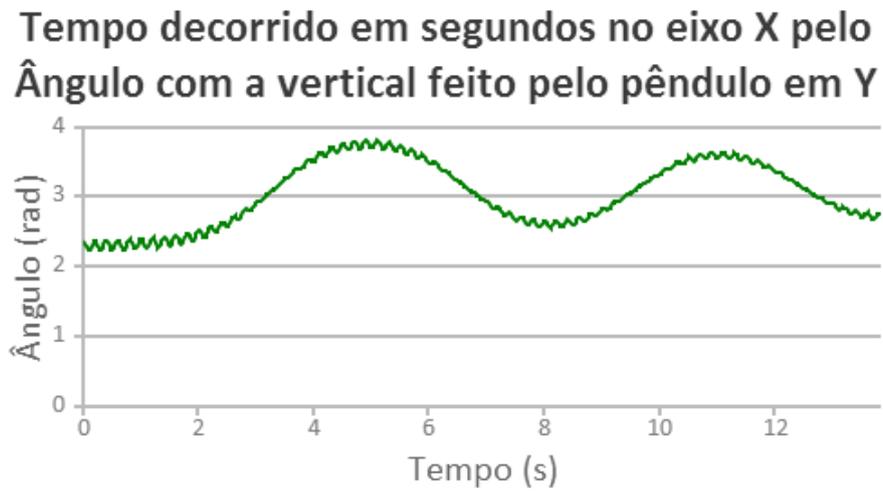


Figura 3: Traço do pêndulo após 14s de movimento em um ângulo inicial de  $136^\circ$



*Figura 4: Gráfico do pêndulo após 14s de movimento em um ângulo inicial de  $136^\circ$*

## 1.4 Movimento caótico do pêndulo impulsionado

Este pêndulo apresenta comportamento caótico dependendo dos parâmetros iniciais que utilizamos, isto é, é impossível determinar seu movimento.

Vamos tomar como exemplo os seguintes parâmetros iniciais e comparar os traços e gráficos gerados:

$$\begin{aligned} \text{Massa} &= 13 \text{ Kg} \\ \text{Coef. Amortecimento} &= 0 \text{ Kg/s} \\ \text{Vel. Angular Inicial} &= 0 \text{ rad/s} \\ \text{Frequência de Vibração} &= 0.79\pi \text{ rad/s} = 0.39 \text{ Hz} \\ \text{Amplitude do Impulso} &= 0.7 \text{ m} \\ \text{Comprimento do Pêndulo} &= 3 \text{ m} \\ \text{Gravidade} &= 9.8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Comparando os traços, gráficos e diagramas:

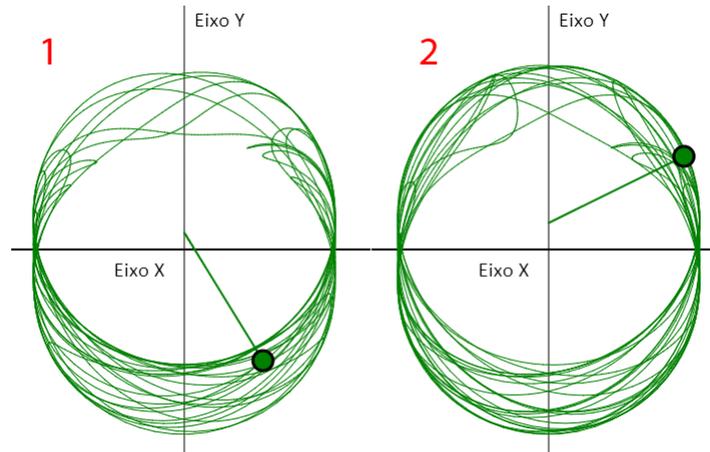


Figura 5: Traço dos pêndulos após 60s de movimento em um ângulo inicial de  $-108^\circ$

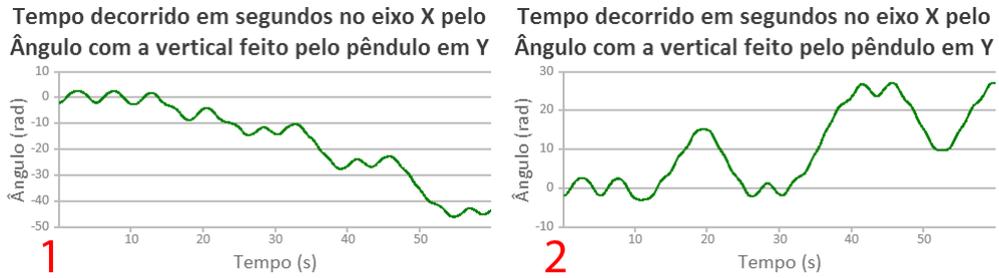


Figura 6: Gráfico dos pêndulos após 60s de movimento em um ângulo inicial de  $-108^\circ$

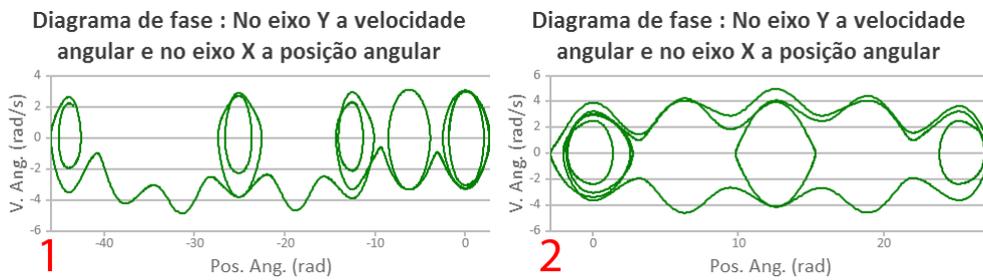


Figura 7: Diagramas de fase após 60s de movimento em um ângulo inicial de  $-108^\circ$

Através disso, podemos confirmar o movimento caótico que pode ser causado a partir de mesmos valores iniciais.

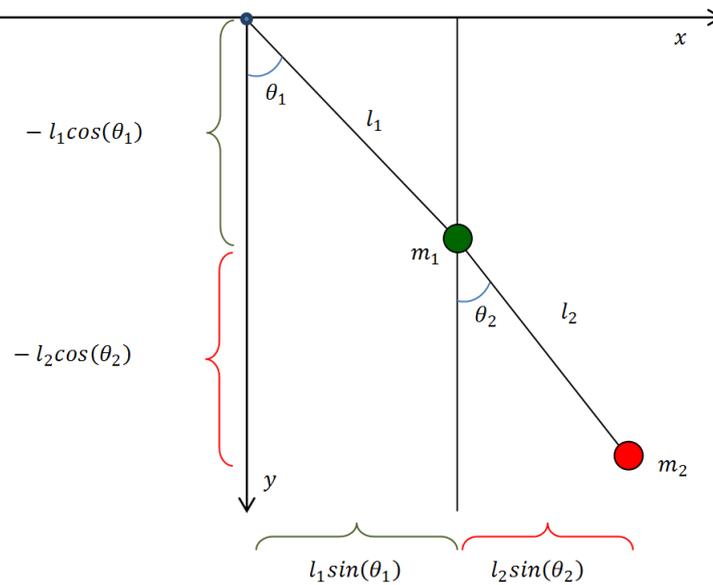
## Capítulo 2

# O Pêndulo Duplo

### 2.1 Dedução das equações

O pêndulo duplo consiste em um pêndulo acoplado a outro pêndulo através de sua massa. Em nosso caso, ilustraremos estes pêndulos como sendo simples.

Para certas condições, este sistema apresenta um comportamento caótico também. Vamos iniciar então com a dedução das equações do movimento deste sistema através da mecânica Lagrangiana.



Portanto, vamos calcular as energias envolvidas:

Massa 1:

$$x_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \text{ e } y_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

Massa 2:

$$x_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

$$y_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

Então, T fica:

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$T = \frac{m_1}{2}(l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{m_2}{2}(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2)$$

$$T = \frac{(m_1 + m_2)}{2}(l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_2}{2}(l_2^2 \dot{\theta}_2^2)$$

A energia potencial U depende somente de y, então:

Massa 1:

$$U = -m_1 g l_1 \cos \theta_1$$

Massa 2:

$$U = -m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

Então a energia U total será:

$$U = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

$$U = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

A Lagrangiana será:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} (l_2^2 \dot{\theta}_2^2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

Para obter a equação para  $\theta_1$ , devemos calcular os termos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \\ (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -l_1 g (m_1 + m_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

Então, ficamos com:

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 g (m_1 + m_2) \sin(\theta_1) = 0$$

Que simplificando por  $l_1$ , fica:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g (m_1 + m_2) \sin(\theta_1) = 0$$

De forma análoga para  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_2 m_2 g \sin \theta_2\end{aligned}$$

Então, ficamos com:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 m_2 g \sin \theta_2 = 0$$

Que simplificando por  $l_2$ , fica :

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0$$

Ambas as equações devem ser resolvidas em termos de  $\ddot{\theta}_1$  e  $\ddot{\theta}_2$  para serem utilizadas no método numérico. Ficamos então com:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= \frac{-g(2m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2 \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 (\dot{\theta}_2^2 l_2 + \dot{\theta}_1^2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_1 (2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1^2 l_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_2 (2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}\end{aligned}$$

## 2.2 Adequando para o método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Conforme visto, as 2 equações do movimento para o pêndulo duplo não possuem uma solução analítica.

Vamos escrevê-las de forma que seja fácil utilizar o método de Runge-Kutta.

Fazendo a seguinte mudança de variáveis obteremos 4 equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{-g(2m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2 \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 (\omega_2^2 l_2 + \omega_1^2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_1 (2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\omega_1^2 l_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 + \omega_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_2 (2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}\end{aligned}$$

Que podemos escrever na forma de funções da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = f_1(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \\ \dot{\omega}_2 = f_2(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1 = f_3(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 = f_4(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \end{cases}$$

Onde em  $f_3$  e  $f_4$  realizamos o abuso de notação em relação aos parâmetros das funções.

Portanto, a implementação em Javascript do método numérico é:

```

function f1 (theta_1 , theta_2,vel_angular1,vel_angular2) {
2   temp = -gravidade*(2*massa1 + massa2)*Math.sin(theta_1) - massa2*gravidade*
   Math.sin(theta_1 - 2*theta_2);
   temp = temp - 2*Math.sin(theta_1 - theta_2)*massa2*( Math.pow(vel_angular2
   ,2)*comprimento_pendulo2 + Math.pow(vel_angular1,2)*comprimento_pendulo1
   *Math.cos(theta_1 -theta_2) );
4   temp = temp / (comprimento_pendulo1*(2*massa1 + massa2 -massa2*Math.cos(2*
   theta_1 - 2*theta_2) ));
   return temp;
6 }

8 function f2 (theta_1 , theta_2,vel_angular1,vel_angular2) {
   temp = 2*Math.sin(theta_1 - theta_2);
10  temp = temp * ( Math.pow(vel_angular1,2)*comprimento_pendulo1*(massa1 +
   massa2) + gravidade*(massa1 + massa2)*Math.cos(theta_1) + Math.pow(
   vel_angular2,2)*comprimento_pendulo2*Math.cos(theta_1 - theta_2) );
   temp = temp / (comprimento_pendulo2*(2*massa1 + massa2 - massa2*Math.cos(2*
   theta_1 -2*theta_2) ));
12  return temp;
   }

14 function rungeKuttaPendulo(timediff) {
16   var h = timediff/1000;

18   var a = [];
   var b = [];
20   var c = [];
   var d = [];

22   a[0] = f1(theta_n_1,theta_n_2,vel_angular_n_1,vel_angular_n_2);
24   a[1] = f2(theta_n_1,theta_n_2,vel_angular_n_1,vel_angular_n_2);
   a[2] = vel_angular_n_1;
26   a[3] = vel_angular_n_2;

28   b[0] = f1(theta_n_1 + (h/2)*a[2] ,theta_n_2 + (h/2)*a[3] ,vel_angular_n_1 +
   (h/2)*a[0] ,vel_angular_n_2 + (h/2)*a[1] );
   b[1] = f2(theta_n_1 + (h/2)*a[2] ,theta_n_2 + (h/2)*a[3] ,vel_angular_n_1 +
   (h/2)*a[0] ,vel_angular_n_2 + (h/2)*a[1] );
30   b[2] = vel_angular_n_1 + (h/2)*a[0];
   b[3] = vel_angular_n_2 + (h/2)*a[1];

32   c[0] = f1(theta_n_1 + (h/2)*b[2] ,theta_n_2 + (h/2)*b[3] ,vel_angular_n_1 +
   (h/2)*b[0] ,vel_angular_n_2 + (h/2)*b[1] );
   c[1] = f2(theta_n_1 + (h/2)*b[2] ,theta_n_2 + (h/2)*b[3] ,vel_angular_n_1 +
   (h/2)*b[0] ,vel_angular_n_2 + (h/2)*b[1] );
34   c[2] = vel_angular_n_1 + (h/2)*b[0];
   c[3] = vel_angular_n_2 + (h/2)*b[1];

36   d[0] = f1(theta_n_1 + h*c[2] ,theta_n_2 + h*c[3] ,vel_angular_n_1 + h*c[0] ,
   vel_angular_n_2 + h*c[1] );
   d[1] = f2(theta_n_1 + h*c[2] ,theta_n_2 + h*c[3] ,vel_angular_n_1 + h*c[0] ,
   vel_angular_n_2 + h*c[1] );
40   d[2] = vel_angular_n_1 + h*c[0];
   d[3] = vel_angular_n_2 + h*c[1];

42   theta_n_1 = theta_n_1 + (h/6)*(a[2] + 2*b[2] + 2*c[2] + d[2]);
44   theta_n_2 = theta_n_2 + (h/6)*(a[3] + 2*b[3] + 2*c[3] + d[3]);

46   vel_angular_n_1 = vel_angular_n_1 + (h/6)*(a[0] + 2*b[0] + 2*c[0] + d[0]);
   vel_angular_n_2 = vel_angular_n_2 + (h/6)*(a[1] + 2*b[1] + 2*c[1] + d[1]);
48   delete a; delete b; delete c; delete d;
50 }

```

### 2.3 Movimento caótico do pêndulo duplo

Este pêndulo também apresenta um movimento caótico com os mesmos parâmetros iniciais em lançamentos diferentes.

Vamos tomar os seguintes parâmetros iniciais e comparar os traços, gráficos e diagramas de fase de cada um:

$$\text{Massa 1} = 13 \text{ Kg}$$

$$\text{Massa 2} = 13 \text{ Kg}$$

$$\text{Vel. Angular Inicial 1} = 0 \text{ rad/s}$$

$$\text{Vel. Angular Inicial 2} = 0 \text{ rad/s}$$

$$\text{Comprimento do Pêndulo 1} = 1 \text{ m}$$

$$\text{Comprimento do Pêndulo 2} = 1 \text{ m}$$

$$\hat{\text{Ângulo Inicial 1}} = 90^\circ$$

$$\hat{\text{Ângulo Inicial 2}} = 125^\circ$$

$$\text{Gravidade} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

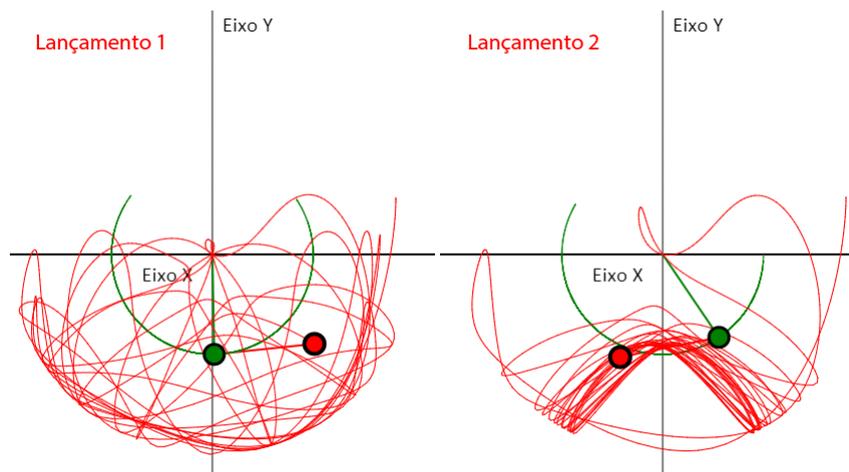
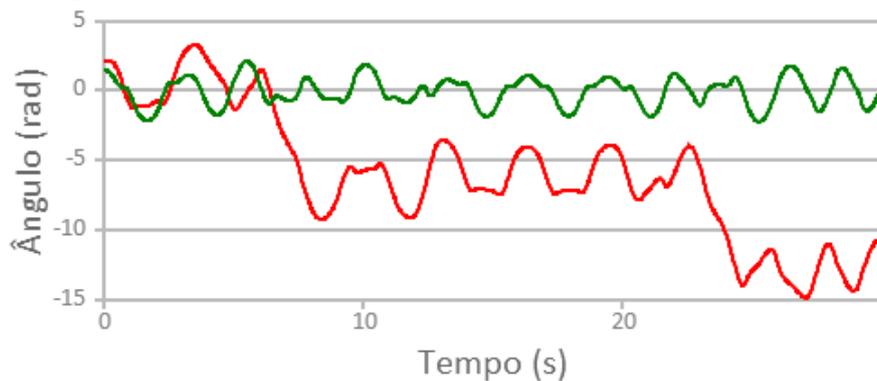


Figura 8: Traços dos pêndulos duplos após 30s de movimento com os parâmetros iniciais definidos.

## Lançamento 1

Tempo decorrido em segundos no eixo X pelo Ângulo com a vertical feito pelo pêndulo em Y



## Lançamento 2

Tempo decorrido em segundos no eixo X pelo Ângulo com a vertical feito pelo pêndulo em Y

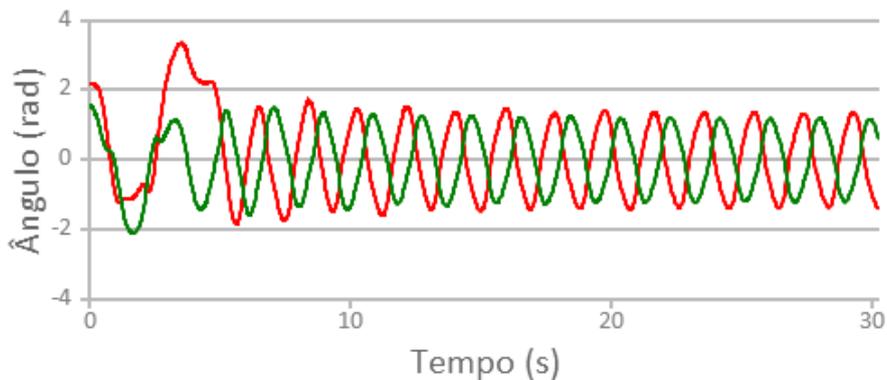
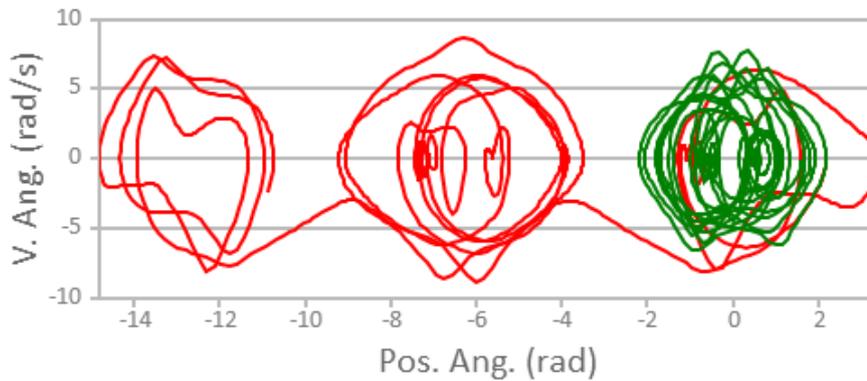


Figura 9: Gráficos dos pêndulos duplos após 30s de movimento com os parâmetros iniciais definidos.

## Lançamento 1

Diagrama de fase : No eixo Y a velocidade angular e no eixo X a posição angular



## Lançamento 2

Diagrama de fase : No eixo Y a velocidade angular e no eixo X a posição angular

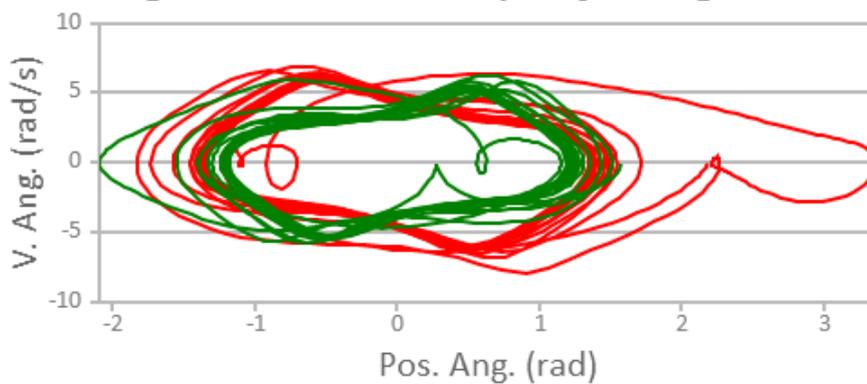


Figura 10: Diagramas de fase dos pêndulos duplos após 30s de movimento com os parâmetros iniciais definidos.

Através destes gráficos, podemos confirmar o movimento caótico que pode ser causado a partir de mesmos parâmetros iniciais.

# Conclusões

De fato, os 2 tipos de pêndulos apresentados mostram resultados interessantes e que são mais fáceis de analisar do que um modelo real.

O primeiro, o pêndulo impulsionado, apresenta a mudança de ponto estável conforme variamos os parâmetros de oscilação do pivô. Em outros parâmetros podemos avaliar o movimento caótico que este apresenta.

Já o pêndulo duplo nos dá momentos interessantes de avaliação de como o caos age em sistemas relativamente simples.

Finalmente, estes applets desenvolvidos em HTML5 conseguem ser uma nova ferramenta de estudo e ensino por sua fácil utilização em dispositivos diferentes e por possuir uma melhor facilidade de desenvolvimento.

# Apêndice A - Método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> Ordem

## Apresentação

Em análise numérica, os métodos de Runge-Kutta formam uma importante família de métodos iterativos implícitos e explícitos para resolução numérica de soluções de equações diferenciais ordinárias.

Neste projeto utilizamos o método de 4<sup>a</sup> ordem, sendo este o mais utilizado. Existem os métodos de ordem inferiores e superiores, mas para nossos propósitos o de 4<sup>a</sup> ordem é o suficiente.

Vamos considerar uma EDO com PVI:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Com um passo  $h > 0$ , devemos calcular:

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n) \\ k_{n2} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n1}\right) \\ k_{n3} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n2}\right) \\ k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}) \end{aligned}$$

Para então, obter:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})$$

Este é, então, o método mais utilizado em simulações físicas.

## Generalizando para várias variáveis

Conforme visto em nossas deduções, as nossas equações não dependem de somente uma variável e sim várias.

O método de Runge-Kutta pode ser ampliado para estas equações, basta que haja uma transformação de variáveis para obter um sistema de equações diferenciais.

Então, suponha que tenhamos  $m$  variáveis com  $m$  equações:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ x_m' = f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases}$$

Note que do lado direito não temos derivadas e que do lado esquerdo temos somente derivadas de primeira ordem. Estas equações podem ser resumidas na forma vetorial:

$$\bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}})$$

onde  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  é o vetor das variáveis e  $\bar{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  o "vetor" das funções. Então, vamos definir o vetor de variáveis no passo  $n$  e  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_n &= (x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}) \\ \bar{\mathbf{x}}_{n+1} &= (x_{1,n+1}, x_{2,n+1}, \dots, x_{m,n+1}) \end{aligned}$$

O método fica, então:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_n &= \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \bar{\mathbf{b}}_n &= \bar{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{x}} + \frac{h}{2}\bar{\mathbf{a}}_n\right) \\ \bar{\mathbf{c}}_n &= \bar{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{x}} + \frac{h}{2}\bar{\mathbf{b}}_n\right) \\ \bar{\mathbf{d}}_n &= \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}} + h\bar{\mathbf{c}}_n) \end{aligned}$$

Então, o vetor  $\bar{\mathbf{x}}_{n+1}$  será:

$$\bar{\mathbf{x}}_{n+1} = \bar{\mathbf{x}}_n + \frac{h}{6}(\bar{\mathbf{a}}_n + 2\bar{\mathbf{b}}_n + 2\bar{\mathbf{c}}_n + \bar{\mathbf{d}}_n)$$

O vetor  $\bar{\mathbf{x}}_{n+1}$  dará o estado das variáveis após o passo  $h$ .

Fica então fácil utilizar qualquer linguagem de programação para programar applets ou mesmo simulações numéricas e obter resultados para inúmeros problemas físicos que não possuem soluções analíticas.

# Apêndice B – Frameworks Utilizados

Nos applets desenvolvidos e utilizados para obter os resultados foram utilizados alguns frameworks para facilitar o desenvolvimento.

O primeiro framework foi para organizar o documento HTML, sendo este o Bootstrap CSS Framework.

Já o utilizado para desenvolvimento em Javascript foram os seguintes:

1. JQuery - <http://jquery.com>
2. Kinetic JS - <http://kineticjs.com>

Foi utilizado também o framework CanvasJS Charts (<http://canvasjs.com/>) para mostrar gráficos das animações em tempo real.

Não é necessário utilizar estes frameworks para desenvolver o que foi visto, entretanto a utilização deles facilita muito o desenvolvimento além de gerar uma organização no código.

# Apêndice C – Links para as simulações

Aqui estão os endereços para os applets que foram apresentados aqui:

Pêndulo Impulsionado:

<http://www.ime.unicamp.br/ra097254/penduloimpulsionado.html>

Pêndulo Duplo:

<http://www.ime.unicamp.br/ra097254/penduloduplo-rk.html>

Basta utilizar um navegador recente (Google Chrome, Mozilla Firefox, Opera, Safari ou Internet Explorer) para que as simulações sejam executadas. Não é necessário instalar nenhum plugin ou software adicional para executá-las.

Caso você tenha problemas na utilização das simulações, verifique se a versão do seu navegador é a mais recente e se todas as configurações relativas a drivers estão corretas em seu computador.

# Bibliografia

- [1] S. T. Thornton e J. B. Marion, Classical Dynamics. Thomson Brooks/Cole, 5a edição, 2004.
- [2] W.E Boyce, R.C. DiPrima, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. LTC Books, 8a edição, 2005.
- [3] M.A.G. Ruggiero, V.L.R Lopes, Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais. Pearson Makron Books, 2a edição, 2006.
- [4] Halliday e Resnick, Fundamentos da Física, Volume II, Gravitação, Ondas e Calor. LTC Books, 8a edição, 2010.
- [5] W3Schools – The world largest web development database, em <http://www.w3schools.com/>.
- [6] JQuery - Javascript Framework, em <http://www.jquery.com/>.
- [7] Kinetic JS – Javascript Framework, em <http://kineticjs.com/>.
- [8] CanvasJS Charts – Javascript Charts Framework, em <http://canvasjs.com/>.
- [9] Bootstrap - CSS Framework, em <http://getbootstrap.com>.