1 - Um pequena balsa de massa **m** está sendo puxada, contra a correnteza de um rio, por meio de um motor que enrola uma corrente presa a balsa. A força aplicada pela corrente ao barco é constante e vale **ma**. A força resistiva da correnteza é proporcional a velocidade do barco e tem a forma **mkv**. No instante inicial, quando o motor foi acionado a balsa estáva parada.

- 0.5 a) Faça um desenho indicando as forças e escreva a equação do movimento .
- 1.0 b) Determine a velocidade da balsa em função do tempo.
- 1.0 c) Determine a velocidade terminal da balsa.

2a - Um sistema é descrito pela equação logística $\mathbf{x_{n+1}} = \alpha\, \mathbf{x_n}\, (\mathbf{1} - \mathbf{x_n})$.

- 0.75 a) Para qual intervalo de α o sistema é periódico com quatro valores ?
- 0.75 b) Para qual intervalo de α o sistema é caótico ?

2b - 1.0 Determine a dimensão fractal do atrator abaixo.

3 - Um ioiô é constituído por um conjunto de discos de momento de inércia $\mathbf{I_o}$, sendo que o fio passa a uma distância $\mathbf{d}$ do centro dos discos.

- 1.0 a) Escreva a lagrangeana do sistema e a(s) equação(ões) do(s) vínculo(s).
- 0.5 b) Determine a(s) equação(ões) do movimento.
- 1.0 c) Determine a(s) força(s) de vínculo.

4 - Um corpo de massa $\mathbf{m}$ está sob a ação da força $\mathbf{F(r)} = -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{r^2}} - \frac{\lambda}{\mathbf{r^3}}$. O momento angular do corpo é $\mathbf{l} = \sqrt{\mathbf{2m}\lambda}$.

- 0.5 a) Determine a energia potencial $\mathbf{V(r)}$ do corpo.
- 0.5 b) Escreva a energia mecânica e mostre que o potencial efetivo para esse corpo é

$$\mathbf{V_{ef}} = \frac{\lambda}{\mathbf{2r^2}} - \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{r}}$$

- 1.0 c) Faça um esboço do gráfico do potencial efetivo e deternine os possíveis movimentos do corpo.
- 1.0 d) Obtenha a energia para órbita circular estável.