MECÂNICA 1

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS: Turma 2/2007

1)A força de atração entre duas partículas é dada por: $\vec{f}_{12} = k\left[(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - \frac{r}{v_0}(\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1)\right]$, onde k é uma constante, v_0 é uma velocidade constante e r = $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Calcule o torque interno para esse sistema de duas partículas e explique porque ele não se anula. O sistema é conservativo?

2)Considere o sistema Terra-Lua girando em torno do Sol.
(a)Mostre que o problema do movimento desse sistema ao redor do Sol pode ser reduzido a dois problemas isolados(duas equações diferenciais desacopladas): 1) Ao movimento da Lua ao redor da Terra, onde a Lua está sujeita à força de atração da Terra e, 2) Ao movimento do centro de massa do sistema Terra-Lua ao redor do Sol onde a massa do sistema sofre a atração do Sol.
(b)Além da terceira lei de Newton, qual outra hipótese deve ser considerada para a redução mostrada no item (a). Suponha que o Sol esteja em repouso em relação a um referencial inercial e que a massa do Sol seja muito maior que a massa do sistema Terra-Lua. Resolva a questão a partir de um referencial com origem no Sol.

3)Em termos de G, L e massas:
(a)Qual é o período de rotação de uma estrela composta por duas massas iguais M distando entre si de L.
(b)Qual é o período de rotação para uma estrela dupla com duas massas diferentes M_1 e M_2 e separação L.
(c)Qual é o período de uma estrela composta(tripla) por três massas iguais M formando um triângulo eqüilátero de lado L.
(d)Qual é o período de uma estrela tripla com três massas diferentes, M_1, M_2 e M_3 formando um triângulo eqüilátero de lado L.

4)Considere um disco horizontal de raio R, girando no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante ω. O eixo de rotação é vertical e passa pelo seu centro. Sejam dois pontos distintos P e Q, situados na borda desse disco em posições diametralmente opostas. Deseja-se lançar uma partícula de massa m de tal maneira que parta de P e chegue a Q. Considerando o raio do disco suficientemente grande, descreva o movimento dessa partícula para um observador inercial que está fora desse disco e para um outro observador que está em rotação junto com o disco. Despreze o atrito entre a partícula e a superfície do disco.
Nota: Para um observador fora do disco, o movimento será retilíneo(força resultante nula), porém os pontos P e Q estão em movimento de rotação. Dessa forma, para que a partícula chegue ao ponto Q, é necessário lançá-la com uma velocidade que percorra a distância de um diâmetro(2R) num intervalo de tempo que o ponto Q dê um número inteiro de voltas completas, retornando assim ao ponto de partida.

5)Um disco perfeitamente liso, horizontal, gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ constante, em torno de um eixo vertical que passa no seu centro. Uma pessoa em cima do disco, a uma distância R da origem, arremessa uma moeda de tamanho desprezível, de massa m e velocidade inicial V relativa ao disco, em direção à origem. Mostre que esse movimento, num instante t, desprezando termos em $\boldsymbol{\omega^2 t^2}$, parece a essa pessoa no disco um arco de parábola. Obtenha a equação da parábola.

6)Um avião sobrevoa o pólo norte a 800 km/h ao longo de um meridiano que gira com a Terra. Determine o ângulo entre a direção do fio de prumo preso ao avião quando ele passa pelo pólo norte e a direção de um fio de prumo pendurado na Terra na região do pólo norte.

7)Um corpo na superfície terrestre, é lançado do repouso de uma altura h, a uma latitude de 40^0 N. Para h= 100 m, avalie o deslocamento lateral do ponto de impacto, devido à força de Coriolis.

8)Um corpo inicialmente em repouso, cai de uma altura h acima da superfície terrestre.

(a)Calcule a força de Coriolis como função do tempo, supondo em primeira aproximação, que o seu efeito seja desprezível em relação ao movimento. Utilize a velocidade de um corpo em queda livre com aceleração $\mathbf{g_e}$. Despreze a resistência do ar e suponha que h seja pequeno para que $\mathbf{g_e}$ possa ser considerada constante.

(b)Calcule o deslocamento do ponto de impacto com o solo, resultante do efeito da força de Coriolis, como segunda aproximação.

9)Considere S um referencial inercial, fixo, com origem no centro da Terra e eixo z apontando para o norte. Seja S´ um referencial que gira com a Terra.

(a)Escreva a equação que representa a transformação de qualquer vetor de S´para S. Utilize essa relação para obter a expressão da força de Coriolis que um corpo em S´ sente. Defina todos os símbolos utilizados.

(b)No hemisfério norte, qual é a direção da força de Coriolis em um corpo que se move na direção leste e para um corpo que se move verticalmente para cima.

(c)Considere um corpo atirado ao solo de uma distância de 3 m, a uma latitude λ de 30^0 norte. Ache, aproximadamente, a deflexão horizontal devido à força de Coriolis, quando ele atinge o solo. Despreze a resistência do ar.

10) Considere um corpo em movimento na superfície terrestre com velocidade de 10 m/s. Admita a Terra como uma esfera rígida em rotação. Considere g_0=10 m/s^2, R_T(raio da Terra)=6400 km, ω_R(velocidade de rotação da terra)=7,3 x 10^{-5} s^{-1}. O vetor ω_R está dirigido no sentido Sul-Norte.

(a)Faça uma estimativa do máximo valor da relação entre a aceleração de Coriolis e g_0 no equador e nos pólos. Admitindo que a velocidade do corpo é sempre tangente à superfície terrestre, para que direção o corpo é desviado pela força de Coriolis?

(b)A partir de um desenho simples, discuta a influência da rotação da Terra na aceleração efetiva da gravidade. Qual a direção de um fio de prumo a medida que nos deslocamos do pólo sul para o equador? Faça uma estimativa do efeito da rotação da Terra na intensidade da aceleração da gravidade nos pólos e no equador.

11) Um rio de largura D corre em direção norte, com uma velocidade v_0 e latitude λ.

(a)Prove que a água, na margem esquerda do rio, será mais alta do que na margem direita de uma altura de $(2D\omega v_0 \operatorname{sen}\lambda)(g^2 + 4\omega^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2\lambda)^{\frac{1}{2}}$, onde ω é a velocidade angular em módulo da Terra em torno do seu eixo.

(b)Mostre que, para fins práticos, o resultado do item (a) é igual a $\dfrac{(2\omega D v_0 \operatorname{sen}\lambda)}{g}$.

(c)Se o rio tem 2 km de largura, e corre com velocidade de 5 km/h, numa latitude de 45^0, de quanto a água na margem esquerda será mais alta que a na direita?

12) Determine as equações de movimento de um pêndulo simples, levando em consideração a rotação da Terra em torno do seu eixo com velocidade angular ω.

(a)Supondo que o fio tenha comprimento l e que a tensão seja T, mostre que o movimento é descrito por:

$$m\ddot{x} = -T\left(\frac{x}{l}\right) + 2m\omega\dot{y}\operatorname{sen}\lambda$$

$$m\ddot{y} = -T\left(\frac{y}{l}\right) - 2m\omega(\dot{x}\operatorname{sen}\lambda + \dot{z}\cos\lambda)$$

$$m\ddot{z} = T\frac{(l-z)}{l} - mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda$$

(b)Admitindo que o pêndulo efetue apenas pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio, de modo que o movimento se dê no plano x-y, simplifique as equações do movimento para: $\ddot{x} = -\dfrac{gx}{l} + 2\omega\dot{y}\operatorname{sen}\lambda$ e $\ddot{y} = -\dfrac{gy}{l} - 2\omega\dot{x}\operatorname{sen}\lambda$.

(c)Resolva as equações obtidas em (b) para condições iniciais convenientes e mostre que a solução geral tem a forma:

$$x = C_1\cos\left(\alpha - \sqrt{\frac{g}{l}}\right)t + C_2\operatorname{sen}\left(\alpha - \sqrt{\frac{g}{l}}\right)t + C_3\cos\left(\sqrt{\alpha + \frac{g}{l}}\right)t + C_4\operatorname{sen}\left(\alpha + \sqrt{\frac{g}{l}}\right)t$$

$$y = -C_1\operatorname{sen}\left(\alpha - \sqrt{\frac{g}{l}}\right)t + C_2\cos\left(\alpha - \sqrt{\frac{g}{l}}\right)t - C_3\operatorname{sen}\left(\sqrt{\alpha + \frac{g}{l}}\right)t + C_4\cos\left(\alpha + \sqrt{\frac{g}{l}}\right)t$$

Mostre que a aproximação: $C_4 \sim C_2$, permite obter:

$$x = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\ \operatorname{sen}(\omega\operatorname{sen}\lambda t) \text{ e } y = A\operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\ \cos(\omega\operatorname{sen}\lambda t).$$

Dê uma interpretação física para a solução acima.

13) Um projétil é arremessado na direção leste de um ponto da superfície terrestre localizado a uma latitude λ norte com uma velocidade de módulo v_0 e ângulo de inclinação em relação à horizontal α.

(a)Mostre que a deflexão lateral do projétil é: $d = \dfrac{4v_0^3}{g^2}\omega\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha$, ao atingir o solo, onde ω é a freqüência de rotação da Terra.

(b)Se o alcance do projétil for R_0 para o caso $\omega=0$, mostre que a variação devido à rotação da Terra será:

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R_0^3}{g}}\omega\cos\lambda\left(\cot^{1/2}\alpha - \frac{1}{3}\text{tg}^{3/2}\alpha\right).$$

14) Mostre que devido à rotação da Terra em torno do seu eixo, o peso aparente de um corpo de massa m e latitude λ é: $m\sqrt{\left(g-\omega^2 R\cos^2\lambda\right)^2+\left(\omega^2 R\,\text{sen}\,\lambda\cos\lambda\right)^2}$ onde R é o raio da Terra.

15) Um carrossel inicia seu movimento a partir do repouso e acelera a uma aceleração angular constante de 0,02 rev/s^2. Uma menina está sentada em uma cadeira situada a 6m do eixo de revolução e segura uma bola de 2 kg nas mãos. Calcule o módulo e a direção da força que ela deve exercer para segurar a bola 5 segundos após o início da rotação do carrossel. Especifique as coordenadas utilizadas.

16) Sob condições favoráveis, foi observada uma corrente oceânica circulando no sentido anti-horário, numa camada isolada da superfície terrestre. O período de rotação da corrente foi medido como 14 horas. Em que latitude e em que hemisfério essa corrente foi detectada?

17)O capitão de um pequeno barco, na região equatorial de calmaria, decide viver a experiência de levantar a âncora(massa=200kg) até o topo do mastro de h=20m. O barco tem em repouso massa M=1000kg.
(a)Por que o barco começa a se mover?
(b)em que direção ele se move?
(c)Com que velocidade em relação à Terra, ele se move?

18) Considere o movimento em queda livre de uma partícula no hemisfério Norte, num ponto de latitude λ, sujeito à força gravitacional terrestre e abandonado do repouso de uma altura h. Sabendo que a aceleração efetiva da gravidade é **g**, que a velocidade angular da terra é $\boldsymbol{\omega}$, dirigida do Sul para o Norte e considerando o sistema de coordenadas S' como mostra a figura, determine em função de h, λ, $\boldsymbol{\omega}$ e **g**:
(a)aceleração de Coriolis,
(b)o tempo de queda,
(c)a deflexão em relação à linha de prumo.