CAPITULO VI

FUERZAS CENTRALES

"*¿Qué es lo que hace que los planetas giren en torno al Sol*?

En los tiempos de Kepler algunas personas contestaban esta pregunta diciendo que había ángeles detrás de ellos, agitando sus alas y empujando a los planetas por sus órbitas. Como verán, la respuesta no está muy lejos de la verdad. La única diferencia es que los ángeles miran en otra dirección y sus alas empujan radialmente hacia adentro."

Richard P. Feynman

The Character of a Physical Law (1965)

FUERZAS CENTRALES

VI-1. Generalidades.

Una *fuerza central* es aquella que deriva de una función potencial con simetría esférica $U = U(r)$. Como veremos más adelante, el sistema formado por dos partículas que interactúan entre sí a través de una fuerza cuya recta de acción pasa por la ubicación de las mismas (y cuyo módulo depende únicamente de la distancia entre ellas) se puede reducir al problema de una partícula "efectiva" sometida a una fuerza central. El problema de fuerzas centrales adquiere así una gran relevancia, ya que en muchos casos la interacción entre dos cuerpos es del tipo mencionado. Por ejemplo, la interacción gravitatoria que rige el comportamiento de los cuerpos celestes o la interacción Coulomiana entre un par de cargas puntuales se ajustan a este esquema.

VI-1.a. Cantidad de Movimiento Angular.

Una partícula que se mueve con velocidad v y cuyo vector posición es r (respecto de un origen de coordenadas O) tiene una cierta cantidad de movimiento angular L (respecto de ese origen) definida por

$$\boxed{\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}} \tag{6-1}$$

Para una partícula que está sometida a una fuerza central, este vector es *constante* en el tiempo. En efecto si

$$\vec{F} = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r$$

entonces la derivada temporal de L es nula

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

debido a que la fuerza central es radial. Tenemos por lo tanto la *Conservación de la Cantidad de Movimiento Angular:*

En un sistema en el cual sólo actúan fuerzas centrales, la cantidad de movimiento angular L es una constante del movimiento.

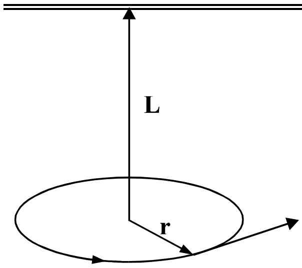

FIG. 1: Vector $\vec{L}$.

Esta constante es vectorial. Esto implica que el movimiento permanece en el plano determinado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ iniciales. (Un cambio en el plano del movimiento implicaría un cambio en la *dirección* de $\vec{L}$, lo cual como hemos visto no es posible).

VI-1.b. Ecuaciones de Movimiento.

Para describir este movimiento usaremos coordenadas polares que son las más apropiadas, ya que:

$$F_r = f(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

Las ecuaciones del movimiento para una partícula de masa m bajo la acción de una fuerza central son por lo tanto,

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = f(r) \tag{6-2}$$

$$m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = 0 \tag{6-3}$$

Multiplicando la última ecuación por r la podemos transformar en

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0.$$

Lo cual no es más que la expresión escalar de la constancia de la cantidad de movimiento angular en este tipo de movimiento.

En efecto, el módulo de $\vec{L}$ es

$$\boxed{l = mrv_\perp = mr^2\dot{\theta}} \tag{6-4}$$

donde hemos llamado $v_\perp$ a la componente de la velocidad perpendicular a $\vec{e}_r$, es decir , $v_\perp = r\dot{\theta}$. La ley de conservación (6-4) es esencial en todo problema de fuerzas centrales.

Ejercicio VI-1:

Segunda Ley de Kepler[1].

Mostrar que el área barrida por el vector posición $\vec{r}$ en un intervalo diferencial $d\vec{r}$ es $dA = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt$. Use entonces la ley de conservación de *l* para mostrar que la *velocidad areolar* $\frac{dA}{dt}$ *es constante.*

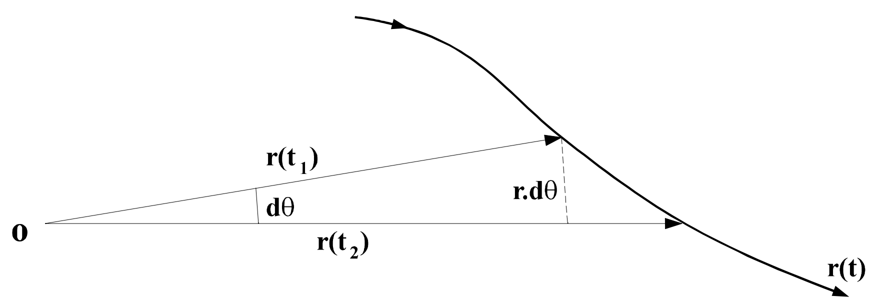

FIG. 2: Área barrida por el radio vector en dt.

Volviendo a las ecuaciones del movimiento y usando la expresión de *l* para eliminar $\dot{\theta}$ de la primera ecuación obtenemos la *ecuación radial:*

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \tag{6-5}$$

---

1 Johannes Kepler formuló esta ley en 1619, basándose en observaciones detalladas del movimiento de los planetas unos 80 años antes de que Newton formulase sus leyes del movimiento.

Es interesante observar que el término en l^2 es la fuerza centrífuga que experimenta un observador (no inercial) solidario con el móvil. La integración de ésta ecuación se puede llevar a cabo si se conoce la forma del potencial $U(r)$. Plantearemos el problema en general en el apartado VI-2 y lo resolveremos para el caso particular de la atracción gravitatoria en el apartado VI-4.

VI-1.c. Conservación de la Energía.

La expresión de la energía cinética en coordenadas polares es

$$T = \frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\perp^2\right) = \frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2\right)$$

Luego, la ecuación que expresa la constancia[2] de la energía del sistema es,

$$E = \frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2\right) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \tag{6-6}$$

Se puede interpretar esta última ecuación como si la partícula se moviera en un *potencial efectivo* $U_{eff} = U(r) + \dfrac{l^2}{2mr^2}$. El término en l^2 se denomina *potencial centrífugo* debido a que al ser derivado respecto de r da origen a la fuerza centrífuga mencionada anteriormente.

La ecuación de la energía nos permite obtener la ley horaria de un movimiento central de energía E y cantidad de movimiento angular ***l***. En efecto, despejando la velocidad radial de la ley de conservación obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\left(\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)\right)^{1/2} \tag{6-7}$$

reordenando e integrando,

2

La fuerza central es conservativa. Este hecho esta implícito en la definición que hemos tomado de la misma, pues deriva de un potencial.

$$\pm \int_{r_0}^{r(t)} \left(\frac{2}{m} \left(E - U_{eff}(r) \right) \right)^{-1/2} dr' = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0 \qquad (6\text{-}8)$$

obtenemos una expresión que permite hallar la ley horaria $r(t)$ para cualquier potencial central. Sólo para algunos potenciales el integral admite una expresión en términos de funciones elementales. El signo a elegir dependerá de las condiciones iniciales que deseamos ajustar. (Según la velocidad radial sea inicialmente entrante o saliente).

Frecuentemente en los movimientos centrales es de interés hallar la *trayectoria* del móvil más que su ley horaria. Un camino posible es eliminar el tiempo en términos del ángulo θ usando para ello la conservación de *l.*

Ejercicio VI-2:

La expresión para la velocidad radial (6-7) puede descomponerse en

$$dr = \pm \left(\frac{2}{m} \left(E - U_{eff}(r) \right) \right)^{1/2} dt \ .$$

a) Use la conservación de $l = mr^2\dot{\theta}$ para eliminar el tiempo de la última ecuación en términos de la variable angular θ.

b) Integrando ambos lados de la ecuación obtenida, muestre que la trayectoria puede obtenerse de

$$\theta(r) = \theta_0 \pm l \int_{r_0}^{r} \frac{dr / r^2}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U_{eff}(r) \right)}}$$

VI-2. Fórmulas de Binet.

Existe una forma alternativa de obtener la trayectoria del móvil y para algunos campos centrales es mucho más efectiva que la descrita en el apartado anterior. Consideramos la variable *auxiliar* $\frac{1}{r} = u$. Usando la conservación de la cantidad de movimiento angular (6-4), podemos obtener expresiones para la velocidad y aceleración radiales en términos de u y sus derivadas angulares. En efecto, éstas derivadas son

$$u' = \frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{m}{l}\dot{r}$$

$$u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{m}{l}\dot{r}\right) = -\frac{m}{l}\frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt}\dot{r} = -\frac{m}{l}\frac{1}{\dot{\theta}}\ddot{r} = -\frac{m^2r^2}{l^2}\ddot{r}$$

De estas expresiones obtenemos fácilmente,

$$m\ddot{r} = -\frac{l^2}{m}u^2u''$$

y la ecuación radial (6-5) se transforma en

$$\boxed{u'' + u + \frac{m}{l^2}\frac{F(u)}{u^2} = 0} \tag{6-9}$$

donde la función F esta definida por $F(u) = \mathrm{f}[r(u)] = \mathrm{f}(1/u)$. Esta ecuación es especialmente fácil de resolver para el movimiento Kepleriano (a ser discutido más adelante).

Ejercicio VI-3:

Mostrar que el módulo de la velocidad (al cuadrado) y la aceleración de cualquier movimiento central están dados en términos de la función $u(\theta)$ por

$$\boxed{v = \frac{l}{m}\left[u^2 + u'^2\right]^{1/2}} \tag{6-10}$$

$$\boxed{a = -\frac{l^2u^2}{m^2}\left[u + u''\right]} \tag{6-11}$$

Estos resultados se conocen como "Fórmulas de Binet" y son útiles cuando se desea calcular la velocidad o aceleración en cualquier punto de una trayectoria conocida.

VI-3. El problema de dos cuerpos.

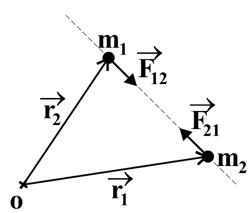

FIG. 3: El problema de dos cuerpos.

El problema de dos partículas puntuales que interactúan entre sí a través de un potencial que es función únicamente de la distancia que las separa $r = \left| r_1 - r_2 \right|$ se denomina *problema de dos cuerpos*. Como veremos a continuación, éste problema se reduce a estudiar el movimiento de una partícula efectiva en un campo de fuerza central.

En la figura 3 se describen las posiciones de dos partículas de masas m_1 y m_2 ubicadas por vectores posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respectivamente (respecto de cierto origen 0). La interacción entre ellas se ha supuesto atractiva para fijar ideas.

Ejercicio VI-4:

Demostrar que si la fuerza de interacción deriva de un potencial que sólo depende de la distancia relativa entonces:

a) Su recta de acción es la que una las partículas.

b) Su módulo sólo depende de la distancia relativa.

c) Verifica el Principio de Acción y Reacción.

Por generalidad, hemos colocado ambas partículas en un campo de *fuerza externa*, sobre el cual haremos hipótesis restrictivas a medida que sea necesario. Este campo ejerce una fuerza $F_{ext}^{(1)}$ sobre la partícula (1) y $F_{ext}^{(2)}$ sobre la partícula (2).

El sistema tiene seis *grados de libertad* representados (por ejemplo) por los vectores posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. En términos de éstos vectores podemos escribir las ecuaciones de movimiento,

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} + F_{ext}^{(1)} = \vec{\mathrm{f}}\left(\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|\right)\hat{r} + \vec{F}_{ext}^{(1)}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} + F_{ext}^{(2)} = -\vec{\mathrm{f}}\left(\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|\right)\hat{r} + \vec{F}_{ext}^{(2)}$$

donde el versor $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ es la dirección del vector *separación relativa* $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ que une las posiciones de ambas partículas. Estas ecuaciones están *acopladas*. Es decir ambas ecuaciones dependen de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ a través de la fuerza de interacción.

Si $\vec{p}_1 = m_1 \dot{\vec{r}}_1$ y $\vec{p}_2 = m_2 \dot{\vec{r}}_2$ son las cantidades de movimiento lineal de las partículas, la cantidad de movimiento angular del sistema es

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

y la energía del mismo se puede escribir como

$$E = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + U\left(\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|\right) + U_{ext}$$

Hasta aquí no hemos hecho más que describir las ecuaciones que regulan la dinámica de un sistema de dos partículas que interactúan entre sí en términos de sus vectores posición. Esta descripción puede hacerse sin embargo en término de variables más adecuadas. Estas son la posición del *centro de masas y la separación relativa* (que ya fue definida). El centro de masa tiene un vector posición $\vec{R}$ dado por (cif. Cap. IV),

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_1 r_2 - m_1 r_2}{m_1 + m_2}$$

Es fácil expresar los vectores posición de las partículas en términos de las nuevas variables $\vec{R}$ y $\vec{r}\left(\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Las relaciones anteriores son lineales por lo que se extienden a velocidades y aceleraciones. Podemos expresar toda la dinámica del sistema en términos de las nuevas variables $\vec{R}$ y $\vec{r}$.

Las ecuaciones de movimiento resultan

$$m_1\ddot{\vec{R}} - \mu\ddot{\vec{r}} = f(r)\hat{r} + \vec{F}_{ext}^{(1)}$$

$$m_2\ddot{\vec{R}} + \mu\ddot{\vec{r}} = -f(r)\hat{r} + \vec{F}_{ext}^{(2)}$$

donde hemos introducido la masa reducida del sistema μ:

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \qquad (6\text{-}12)$$

Las ecuaciones continúan acopladas. Sin embargo, en las nuevas variables es fácil desacoplarlas.

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext}^{(1)} + \vec{F}_{ext}^{(2)}$$

Esta ecuación describe el movimiento del centro de masas bajo la acción de fuerzas externas y es análoga a la que se obtuvo (por un procedimiento similar) en el Cap. IV. Como se demostró allí, el movimiento del centro de masas no depende de la interacción sino solamente del campo externo.

Multiplicando la primera ecuación por m_2, la segunda por m_1 y restándolas se obtiene:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -f(r)\hat{r} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_{ext}^{(1)} + \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_{ext}^{(2)}$$

Esta ecuación determina la dinámica de la separación relativa $\vec{r}$. Esta es determinada por la interacción y además por el campo externo. En ausencia de campo externo el movimiento del centro de masas es trivial y podemos tomar el origen de coordenadas (O) en dicho punto. Es decir $\vec{R} = \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$ sin pérdida de generalidad. En este caso, el problema se reduce a resolver

$$\boxed{\mu\ddot{\vec{r}} = -f(r)\hat{r}} \qquad (6\text{-}13)$$

Esta ecuación de movimiento en la separación relativa es la de un partícula de masa μ sometida a un campo de *fuerza central* (atractivo si $f(r)$ es positiva). Por supuesto, la tal partícula es sólo una construcción matemática útil para resolver el problema.

Las verdaderas partículas del problema son m_1 y m_2. Una vez resuelto el problema de fuerzas centrales y determinada $\vec{r}(t)$ podemos volver atrás en la transformación lineal y obtener $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$. En muchos casos esto no es necesario pues toda la información relevante está en la variable $\vec{r}$.

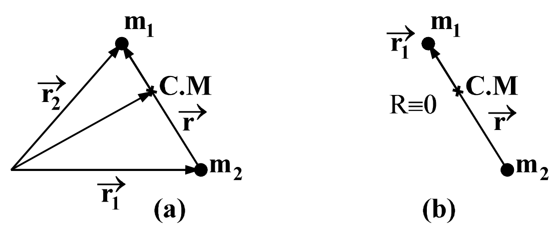

FIG. 4: El problema de dos cuerpos visto desde (a) un origen arbitrario y (b) el centro de masas.
Ejercicio VI-5:

a) Muestre que la cantidad de movimiento angular del sistema (respecto de O) se puede escribir

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} + \vec{R} \times (m_1 + m_2)\dot{\vec{R}} \tag{6-14}$$

Observe que es la suma de un término correspondiente a la cantidad de movimiento angular del centro de masa y otro correspondiente a la partícula "efectiva" de masa μ.

b) Muestre que la energía total del sistema se puede escribir (en ausencia de campo externo).

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) \tag{6-15}$$

Observe que es la suma de las energías asociadas al centro de masas y a la separación relativa.

Ejercicio VI-6:

a) Muestre que la masa reducida de un sistema es aproximadamente igual a *la menor* de las masas, si estas son muy desiguales.

b) Muestre que la masa reducida es la *cuarta parte* de la masa total del sistema si ambas masas son iguales.

Ejemplo VI-7:

En el modelo atómico de Bohr para el Hidrógeno, se supone que el electrón y el protón giran en torno al centro de masa común en órbitas circulares que satisfacen la relación $l = n\eta(\eta = h/2\pi)$ donde h es la constante de Planck) siendo n un entero positivo y l el módulo de la cantidad de movimiento angular del sistema electrón-protón. ¿Cuáles serán los valores de energía compatibles con esta condición?

Teniendo en cuenta que la masa ($m \cong 0.511$ MeV) del electrón es mucho menor que la masa ($M \cong 936$ MeV) del protón, la masa reducida del sistema será $\mu \cong m$. El centro de masas se encuentra ubicado esencialmente donde esta el protón. Podemos tomar el origen de coordenadas en la ubicación del protón y suponer que éste permanece estacionario.

La interacción Coulombiana entre el protón y el electrón es $U(r) = -e^2 / r$, siendo r la distancia electrón-protón y e la carga del electrón (y del protón) en unidades Gausianas.[3] La velocidad y el radio de la órbita están relacionadas por la condición de que la fuerza centrípeta sea la interacción de Coulomb:

$$-\frac{\mu v^2}{r} = -\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{r}^2} \Rightarrow v^2 r = \mathrm{e}^2 / \mu$$

que, junto a la condición de Bohr $l = \mu v r = n\,\eta$ permite hallar los radios posibles (se dejan los detalles a cargo del lector).

$$r_n = \frac{n^2\eta^2}{me^2}$$

[3]e=1.6×10^{-19} Coulomb=4.8×10^{-10} statcoulomb es la unidad de carga fundamental en unidades MKSA y Gaussianas respectivamente.

La energía del sistema es (sin tener en cuenta la pequeña cantidad de energía cinética del protón)

$$E_n = \frac{1}{2}\mu v_n^2 - \frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r_n} - \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{E_0}{n^2}$$

donde se ha usado la relación anterior para eliminar la energía cinética del electrón. La constante $E_0 = \mu e^4 / 2\hbar^2 \cong 13.6$ eV *es la energía de ionización*[4] correcta del átomo de Hidrógeno. Los números enteros $n = 1, 2, 3, \ldots$ determinan los niveles de energía posibles para el sistema. La energía es negativa porque hemos referido el cero de la energía potencial (como es usual) a la situación en la cual hay interacción nula $(r \to +\infty)$ por estar las partículas infinitamente alejadas. Este resultado para los posibles niveles de energía de un átomo de Hidrógeno *coincide* con el que se obtiene a partir de la Mecánica Cuántica, que es la teoría adecuada para un sistema tan pequeño como un Átomo.

VI-4. Aplicación al Movimiento Planetario (o Kepleriano).

Supongamos una partícula de masa m sometida a una fuerza central de atracción $\mathrm{f}(r) = -GmM / r^2$. Esta fuerza deriva del potencial central

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

Si ademas $M >> m$ podemos despreciar el movimiento de M y considerarla fija en el centro de masas. De lo contrario debemos tener presente que r es una *separación relativa* y ademas reemplazar la masa m por la masa reducida en todas las ecuaciones subsiguientes (salvo en la ley de Gravitación propiamente dicha). En lo que sigue, para fijar ideas, trabajaremos en la hipótesis de que M representa la masa solar y m la de cualquier cuerpo que se desplaza en nuestro sistema solar ($m << M$) bajo la atracción de la gravedad solar *exclusivamente.* Sin embargo, el tratamiento es extensible a cualquier potencial central del tipo $1/r$.

VI-4.a. Trayectorias.

Utilizando el cambio de variable $u = 1/r$, la ecuación radial queda (definiendo la constante $\gamma = Gm\,M$).

---

[4] La energía que el átomo debe absorber para liberarse de su electrón.

$$u'' + u - \frac{m}{l^2}\gamma = 0$$

Definimos la constante p (a la cual le asignaremos un significado geométrico más adelante)

$$p = \frac{l^2}{m\gamma} = \frac{l^2}{m^2 MG} \tag{6-16}$$

en términos de la cual la ecuación anterior queda

$$u'' + u = \frac{1}{p}$$

Esta ecuación es la de un oscilador forzado por una fuerza constante, la cual fue resuelta en el Cap. V.Su solución es del tipo

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + A\cos\theta$$

Donde A es una constante de integración y se ha hecho una elección apropiada de ejes para hacer la otra constante de integración igual a cero. Esta ecuación representa una sección cónicas en coordenadas polares. La forma canónica de la misma es

$$\boxed{r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}} \tag{6-17}$$

donde la constante ε es la *excentricidad* y p el *parámetro* de la cónica. Hemos demostrado por lo tanto la

Primera Ley de Kepler:

La trayectoria de un cuerpo en el sistema solar es una sección cónica con el sol en un foco.

La excentricidad es una constante no negativa que determina el tipo de cónica de que se trate ($\varepsilon > 1, \varepsilon = 1, 0 < \varepsilon < 1, \varepsilon = 0$ corresponden a hipérbola, parábola, elipse y circunferencia respectivamente). Para el caso de una elipse $(\varepsilon < 1)$ los semiejes mayor y menor (α y b respectivamente) están dados por

$$\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \qquad\qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \qquad (6\text{-}18)$$

De estas ecuaciones se desprende además que

$$p = b^2 / a \qquad\qquad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

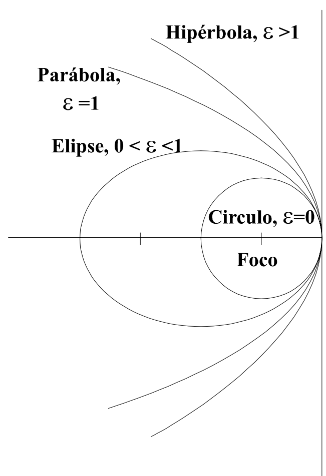

FIG. 5: Secciones cónicas con un foco común.

Ejemplo VI-6: *Tercera ley de Kepler.*

Demostraremos que en el caso de una órbita elíptica, *el período al cuadrado es proporcional al semieje mayor al cubo. La constante de proporcionalidad es la misma para cualquier móvil, pues sólo depende del campo de fuerza.*

El área de una elipse es $\pi a b$. El tiempo que emplea el radio vector en barrer toda esta área es el período T. Dado que (de acuerdo a la segunda ley de Kepler) el radio vector barre áreas a la velocidad constante de $l / 2m$ el período es

$$T = \frac{\pi a \sqrt{a p}}{l/(2m)}$$

donde hemos eliminando el semieje menor $b = \sqrt{a\,p}$. Usando la definición de p (6-16) y elevando al cuadrado tenemos

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \tag{6-19}$$

VI-4.b. El rol de la Energía.

Las constantes del movimiento E y l determinan completamente la órbita del movimiento. Es útil hallar expresiones para los parámetros *geométricos* del movimiento $(\varepsilon \,\mathrm{y}\, p)$ en términos de los parámetros *dinámicos* $(E \,\mathrm{y}\, l)$ del mismo.

Ejercicio VI-7:

La energía total es $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$. Use la fórmula de Binet para eliminar la velocidad en términos de la trayectoria y muestre que ésta energía esta dada, en el caso de órbitas elípticas, por:

$$\boxed{E = \frac{\gamma}{2p}\left(\varepsilon^2 - 1\right) = -\frac{\gamma}{2a}} \tag{6-20}$$

Por otra parte, la ecuación (6-16) da l en términos de p según:

$$\boxed{l = (\gamma m p)^{1/2}} \tag{6-16}$$

Es interesante observar que la constante l queda determinada *únicamente* por el parámetro p. Es decir que podemos tener órbitas de diferentes excentricidades para diferentes valores de la energía, todas con la misma cantidad de movimiento angular. De hecho, podemos discutir la naturaleza de la órbita según el *signo* de la energía:

i) $\varepsilon > 1$, la energía es positiva $(E > 0)$ y esto corresponde a una órbita hiperbólica (abierta).

ii) $\varepsilon = 1$, la energía es nula $(E = 0)$ y esto corresponde a una órbita parabólica (abierta).

iii) $0 < \varepsilon < 1$, la energía es negativa $(-\gamma / 2p < E < 0)$ y esto corresponde a una órbita elíptica (cerrada).

iv) $\varepsilon = 0$, la energía es mínima $\left(E = -\gamma / 2p\right)$ y la situación corresponde a la órbita circular.

La discusión que antecede es consecuencia directa de lo que ya se discutió en relación al papel de la excentricidad.

Como se discutió en el apartado VI-1c, la partícula experimenta un *potencial efectivo* dado por:

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2} = -G\frac{mM}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

y la energía total se puede escribir como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

Consideraremos los cuatro casos anteriores desde el punto de vista de la ecuación de la energía.

i) Caso $E_1 > 0$ (trayectoria hiperbólica).

La energía cinética en cualquier punto de la trayectoria es numéricamente mayor que la energía potencial en ese punto, es decir, $T > |U|$. En este caso vemos que el cuerpo de masa m posee suficiente energía cinética para llevarla hasta donde U es cero, (o sea r es infinito).

El cuerpo escapará del campo de atracción de la masa M.

ii) Caso $E_2 = 0$ (trayectoria parabólica).

En este caso, en cualquier punto de la órbita la energía cinética es igual a la potencial, o sea $T = |U|$.

El cuerpo de masa m posee exactamente la energía necesaria para escapar del campo de atracción (quedando en reposo al final).

iii) Caso $E_3 < 0$ (trayectoria elíptica).

El cuerpo posee menos energía cinética que potencial, o sea $T < |U|$. Las órbitas circulares están incluidas en esta categoría, aunque las consideraremos aparte por ser un caso extremo.

El cuerpo de masa m no posee suficiente energía cinética para poder escapar del campo de atracción.

En este caso existen puntos de la órbita en los cuales la distancia al centro de fuerza es máxima o mínima (se denominan *perihelio y afelio* si la órbita es solar).

iv) Caso $E_4 = E_{\min} < 0$ (trayectoria circular).

La velocidad radial es nula, lo que hace que la energía cinética sea la menor posible (para un dado l).

En la figura 6 graficamos (cualitativamente) el potencial efectivo (y la contribución Kepleriana y centrífuga al mismo) y ubicamos en ese diagrama las cuatro energías típicas ya discutidas.

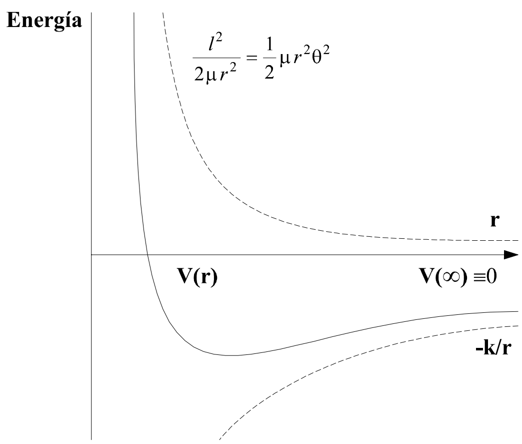

FIG. 6: Potencial efectivo.

Ejercicio VI-8:

Hallar la máxima (R_{max}) y mínima $(R_{\min})$ distancia al centro de fuerza en términos de:

a) Las constantes dinámicas del movimiento $(E \text{ y } l)$.

b) Las constantes geométricas del mismo $(\varepsilon \text{ y } p)$.

VI-4.c. Ejemplos.

i) Velocidad de Escape.

Un cuerpo lanzado con velocidad de módulo v desde cierta distancia R al centro de fuerza tendrá una energía:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{mM}{R}$$

si esperamos que el cuerpo *escape* al campo de atracción, como vimos, esta energía debe ser no negativa. La *menor* velocidad necesaria para escapar a la atracción se denomina *velocidad de escape.* Para ésta velocidad el cuerpo seguirá una trayectoria parabólica al infinito. Podemos obtener la expresión para esta velocidad anulando la energía $(E = 0)$ y despejando v :

$$v_{esc} = \sqrt{2GM / R}$$

En particular, si el cuerpo es lanzado desde la superficie terrestre, como la aceleración de la gravedad terrestre es:

$$g = GM / R^2 = 9.8 m / s^2$$

tenemos (usando $R = 6371\ km$)

$$v_{esc} = \sqrt{2gR} \cong 11.2\, km / s\ .$$

Según este tratamiento idealizado, ¡cualquier objeto lanzado desde la superficie terrestre con una velocidad mayor que ésta no volverá a ser visto por los alrededores!

ii) Movimiento Satelital (órbitas circulares)

El movimiento de los satélites artificiales en el campo central terrestre es un buen ejemplo de los conceptos que hemos desarrollado.

Supongamos que un satélite se encuentra en órbita circular a una distancia $r = R + h$ del centro de la Tierra. R es el radio medio terrestre y h la altura del satélite sobre la superficie terrestre. Para órbitas circulares, la velocidad v y período T del satélite quedan determinadas una vez conocida la altura h. En efecto, a partir de la ecuación de Newton para un movimiento circular uniforme, $\frac{mV^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$, podemos despejar la velocidad:

$$V^2 = \frac{GM}{r} = \frac{gR^2}{R+h} = gR\left(1 + h/R\right)^{-1}$$

donde hemos usado la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre $\left(g = GM / R^2 = 9.8 m / s^2\right)$. Podemos expresar este resultado en términos de la velocidad de escape terrestre $\left(v_{esc} \cong 11.2\, km / s\right)$ hallada en el ejemplo anterior (es una unidad natural para el problema):

$$v = v_{esc}\left(2\left(1 + h / R\right)\right)^{-1/2}$$

mientras que el período orbital es simplemente,

$$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi(R+h)}{V_{esc}}\left[2\left(1+{}^{h}\!/\!_{R}\right)\right]^{1/2} = \frac{2\pi R\left(1+{}^{h}\!/\!_{R}\right)}{V_{esc}}\left[2\left(1+{}^{h}\!/\!_{R}\right)\right]^{1/2} = \frac{\pi R}{V_{esc}}\left[2\left(1+{}^{h}\!/\!_{R}\right)\right]^{3/2}$$

Es interesante observar que el período y la velocidad orbital de un satélite *es el mismo* para una nave espacial de miles de toneladas y para un pequeño tornillo desprendido de la misma. Es decir, estas cantidades son independientes de la masa del móvil. Esto es debido a que la atracción gravitacional es proporcional a la masa del mismo y objetos más masivos son atraídos más fuertemente.

Órbitas de baja altitud.

Si la altura es pequeña en comparación con el radio terrestre $\left(R \cong 6371 km\right)$ estas fórmulas se simplifican a

$$v = \frac{v_{esc}}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad T = \frac{2\sqrt{2}\,\pi R}{v_{esc}}$$

La menor altura practicable (antes de que los efectos de la fricción atmosférica comiencen a hacerse sentir) es del orden de 200 km. En esta órbita el período será de unos 90 minutos.

Órbita Geoestacionaria.

La órbita circular en la cual el satélite tiene el mismo período de rotación que la Tierra se denomina *geoestacionaria.* un observador ubicado en la intersección del radiovector del satélite con la superficie terrestre lo verá estacionario.

Este tipo de órbitas están en el plano ecuatorial (¿por qué?) y su altura está bien determinada ya que T=24 horas, despejando *h* la fórmula del período se obtiene

$$h_g = R\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{T\,v_{esc}}{\pi R}\right)^{2/3} - 1\right\} \cong 35800\,\text{km}$$

Los satélites geoestacionarios de comunicaciones se suelen colocar en grupos de a tres, ubicados en los vértices de un triángulo equilátero en el plano ecuatorial terrestre. De esta forma, constituyen una red de transmisión *sin puntos ciegos* (es decir, alcanzan cualquier punto del globo).

iii) Órbitas de Transferencia.

Este solía ser un problema académico hasta la década del 60, cuando el proyecto Apolo logra el primer alunizaje. ¿Qué órbita debe seguir una nave que parte de la tierra para alcanzar otro cuerpo celeste? Lo más eficiente en términos de combustible resulta dejar que la nave adopte una órbita elíptica *intermedia* (entre la de partida y la de llegada) en el campo central solar y que esta órbita se una *suavemente* a las de los cuerpos de partida y de llegada. Esta situación se ilustra en la figura 7.

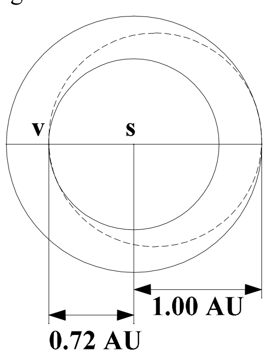

FIG. 7

Para fijar ideas, consideramos el envío de una nave desde la Tierra hacia Venus. Consideraremos que las órbitas de los dos planetas son circulares (con el Sol en su centro). Esto es una buena aproximación ya que la excentricidad de ambas órbitas es muy baja.[5]

Los radios de las órbitas son las respectivas distancias Tierra-Sol y Venus-Sol. Es conveniente adoptar la *Unidad Astronómica* (AU)[6] como medida de distancia en éste problema: los radios orbitales son $R_T = 1.00$ AU Y $R_V = 0.72$ AU respectivamente.

Una masa m en una órbita circular de radio r en torno al Sol (masa M_Θ) tendrá una velocidad dada por

$$G\frac{M_{\Theta}^{m}}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \left(G\frac{M_\Theta}{r}\right)^{1/2}$$

La velocidad en la órbita circular de partida v_T se puede calcular (sin conocer G y M_0) a partir del período orbital terrestre de 1 año y la distancia a tierra Sol (R_T):

$$v_T = \frac{2\pi R_T}{T} = \frac{2\pi \times 1.49 \times 10^8\ km}{3.16 \times 10^7\ s} \cong 29.6\ km/s$$

5

$\varepsilon = 0.017$ para la Tierra y $\varepsilon = 0.007$ para Venus. Estos números son muy pequeños en relación a 1.00.

6

AU=1.496 x 10^{11} m (distancia media Tierra-Sol).

La órbita de transferencia será una elipse tangente a ambas órbitas circulares . Es decir, de eje mayor $2a = R_T + R_v = 1.72\ AU$.

La energía de esta órbita elíptica esta dada por la ecuación (6-20) como $E = -\gamma 2a = -GmM / 2a$. Por lo tanto, hay que dar un impulso a la nave $m(v' - v_T) = m\Delta v$ donde v' será su velocidad en la órbita de transferencia de energía E:

$$E = \frac{1}{2} m v'^2 - G\frac{mM}{R_T} = -G\frac{mM}{2a} = -G\frac{mM}{R_T + R_v}$$

de donde despejamos la velocidad $v' \cong 0.92\, v_T \cong 27.2\ km/s$. El impulso (por unidad de masa) es pequeño: $\Delta v \cong -2.4\ km/s$ (Fue necesario *frenar* la nave para que adopte la órbita de transferencia).

La nave permanecerá en la órbita elíptica de transferencia durante *medio período* hasta alcanzar la órbita de Venus Podemos hallar la duración del viaje interplanetario usando la 3ra Ley de Kepler para hallar éste período (T_{tr}):

$$(T_{tr} / T_T)^2 = \left(\frac{a_{tr}}{R_t}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{R_v}{R_T}\right)\right)^3 = (0.5 \times 1.72)^3$$

de donde surge $T_{tr} \cong 0.80.T_T \cong 292$ días. El tiempo de viaje es, como se mencionó, la mitad de éste período: $t_{viaje} \cong 146$ días (unos 5 meses con los motores apagados simplemente "cayendo" hacia el Sol!)

Al cabo de éstos cinco meses, se deben encender los motores de la nave nuevamente para abandonar la órbita de transferencia y adoptar la órbita circular de Venus en torno al Sol. La velocidad de la nave aumentó (a expensas del campo central del Sol) hasta éste momento. Podemos hallar la velocidad v'' de la nave cuando se halla a una distancia R_v del Sol usando nuevamente la conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2} m v''^2 - G\frac{mM}{R_v} = -G\frac{mM}{2a} = -G\frac{mM}{R_T + R_v}$$

lo cual da el valor $v'' \cong 1.27\ v_T \cong 37.7\ km/s$. Para entrar en la órbita de Venus necesitamos conocer la velocidad orbital. No conocemos el período venusino, de forma que recurrimos nuevamente a la 3ra. Ley de Kepler para hallar v_V:

$$v_V = \frac{2\pi R_V}{T_V} = \frac{2\pi R_T R_V T_T}{T_T R_T T_V} = v_T \frac{R_V}{R_T}\left(\frac{R_V}{R_T}\right)^{3/2} = v_T \left(\frac{R_V}{R_T}\right)^{1/2} \cong 1.18 v_T$$

lo cual da una velocidad $v_V \cong 34.9\ km/s$. Es decir que se requiere un impulso (por unidad de masa) $\Delta v \cong -2.8\ km/s$. De nuevo, es necesario *frenar* la nave para ingresar a la nueva órbita circular y completar la operación de transferencia.