

## UTILIZAÇÃO DO PÊNULO DE TORÇÃO PARA AUXILIAR A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE MOMENTO DE INÉRCIA EM LABORATÓRIO DIDÁTICO

Paulo R. Pascholati<sup>a</sup> [pascholati@if.usp.br]  
Zwinglio O. Guimarães-Filho<sup>a</sup> [zwinglio@if.usp.br]  
Ewa W. Cybulska<sup>a</sup> [cybulska@if.usp.br]  
Marcia A. Rizzutto<sup>a</sup> [rizzutto@if.usp.br]

<sup>a</sup> Instituto de Física da Universidade de São Paulo

### RESUMO

A inadequação do modelo empregado para descrever resultados de experimentos no Laboratório Didático pode ser de utilidade para salientar as limitações sempre presentes em modelos físicos e apresentar algumas das ferramentas de análise de dados utilizadas em Física Experimental para colocar em evidência tais limitações. Em alguns casos, no entanto, estes problemas são tão difíceis de serem compreendidos pelos alunos que modificações no experimento se fazem necessárias. Neste trabalho descrevemos uma destas situações, onde os problemas com a limitação da modelagem foram percebidos graças às contribuições dos alunos da disciplina e, como consequência, o experimento teve seus objetivos e procedimentos alterados, porém usando o mesmo equipamento.

### INTRODUÇÃO

O experimento denominado Pêndulo de Torção do programa da disciplina de Física Experimental 2 do IFUSP tinha, até 2001, o objetivo de apresentar aos alunos um exemplo de relação exponencial, caso em que a relação entre as grandezas pode ser linearizada com o uso de gráfico mono-log. Com a percepção de que os dados apresentavam tendências sistemáticas em relação ao comportamento previsto, claramente determinadas em estudos dos próprios alunos, cuja explicação não pode ser compreendida pelos alunos do primeiro ano de graduação, a utilização do arranjo experimental teve seus objetivos mudados. O pêndulo de torção, então, passou a ser utilizado como uma forma de auxiliar a compreensão do conceito de momento de inércia pela determinação experimental da dependência do momento de inércia com a forma como a massa se distribui em relação ao eixo de rotação para corpos de simetria cilíndrica.

### O PÊNULO DE TORÇÃO

O pêndulo de torção consiste basicamente de um disco (cilindro de altura muito menor que o diâmetro) preso a um suporte por um fio rígido concêntrico ao disco Figura 1a. Girando o disco em relação ao seu eixo de simetria de um ângulo  $\mathbf{q}$ , o fio é torcido e passa a exercer um torque no disco que tende a restaurar o pêndulo ao ângulo de equilíbrio. Este torque é proporcional a  $\mathbf{q}$  por meio de uma constante que depende do tipo de fio e é inversamente proporcional ao comprimento deste. Assim,

$$\mathbf{t}_{Fio} = \frac{-k_0}{L} \cdot \mathbf{q} \quad (1)$$

onde a constante  $k_0$  está relacionada com o módulo de cisalhamento do fio e com seu diâmetro.

## O Experimento de Pêndulo de Torção até 2001

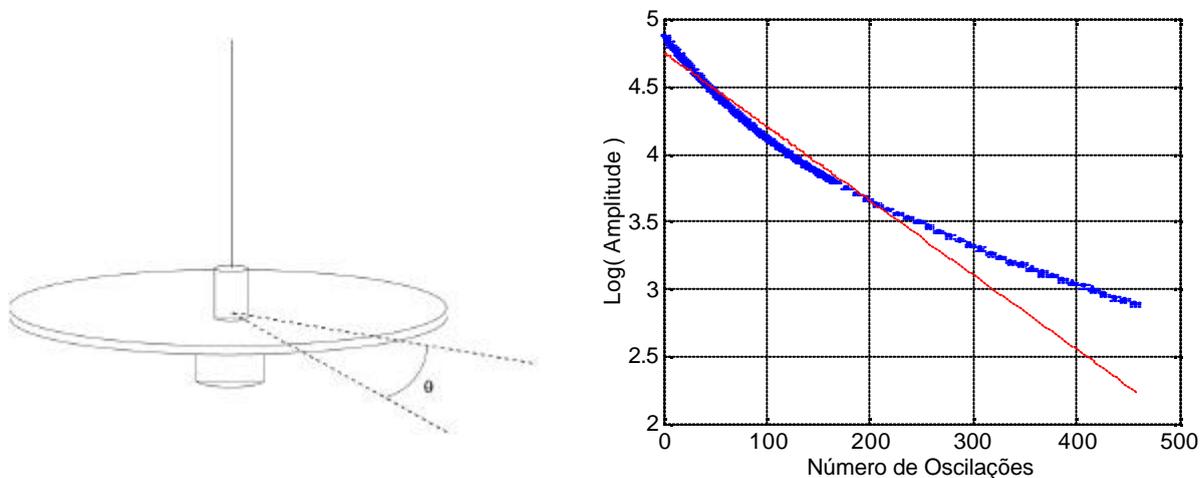
O experimento utilizado até o ano de 2001 consistia em estudar a variação da amplitude do pêndulo de torção em duas situações: com e sem a imersão de um disco coaxial adicional em óleo. Supunha-se que os torques devidos à resistência do ar e do óleo eram proporcionais à velocidade de rotação, ou seja:

$$\mathbf{t}_{\text{fluido}} = -b \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad (2)$$

onde a constante  $b$  pode, no caso do efeito do torque de resistência devido a parte do cilindro imerso em óleo, ser relacionada com as dimensões do cilindro e do recipiente, e com o coeficiente de viscosidade do óleo. Supondo que o torque resultante sobre o pêndulo seja apenas devido aos torques expressos pelas equações (1) e (2), a relação entre a amplitude máxima de oscilação do pêndulo com o tempo é dada por

$$\mathbf{q}_M(t) = \mathbf{q}_{M0} \cdot e^{-I t}, \quad (3)$$

onde  $\mathbf{q}_{M0}$  é a amplitude máxima no início da contagem de tempo e  $I$  uma constante relacionada com a razão entre o momento de inércia do pêndulo e a constante  $b$  da equação (2). Esta relação pode ser linearizada resultando em uma reta em um gráfico em escala mono-log. Os dados obtidos pelos alunos, no entanto, freqüentemente apresentavam uma pequena tendência em relação ao comportamento esperado, porém, estas tendências eram interpretadas como devidas a erros nas determinações das posições de equilíbrio dos pêndulos.



**Figura 1 – (a) Representação do pêndulo de torção e (b) Amplitude de oscilação do pêndulo em função do tempo (expresso em termos do número de oscilações desde o início das medições).**

No último experimento da disciplina de Física Experimental 2, denominada Experiência Eletiva, são os alunos, em equipes de 2 ou 3, que indicam o que desejam investigar<sup>[1]</sup>. Muitos destes experimentos têm por objetivo retomar com maiores cuidados e diferentes enfoques experimentos do programa das disciplinas Física Experimental 1 e 2<sup>[2, 3]</sup>. No caso do experimento Pêndulo de Torção, como os resultados obtidos em aula apontavam para a existência de um comportamento diferente do previsto pelo modelo considerado (e esta eventual diferença ainda não estava bem definida e não era corretamente compreendida) este tema foi escolhido por alguns alunos para o experimento eletivo nos anos de 1999 a 2001.

Entre os estudos sistemáticos sobre o problema do pêndulo de torção efetuados nos Experimentos Eletivos, um deles acompanhou o período de oscilação de dois pêndulos no ar por cerca de uma hora, determinando a amplitude de oscilação através da relação entre as duas posições de inversão da rotação (evitando com isso qualquer dependência com relação à posição de equilíbrio). Demonstraram, assim, claramente que a relação entre a amplitude e o tempo não era bem descrita pela Equação (3) quando o movimento é executado no ar, como se pode observar na Figura 1b.

Este resultado evidenciou que a experiência do pêndulo de torção utilizado para verificar a variação da amplitude com o tempo é sujeita a efeitos mais complicados e, assim, inadequada para ser usada no programa da disciplina de Física Experimental 2. Por outro lado, é bem conhecido o fato dos períodos de movimentos oscilatórios em regimes amortecidos, quando distantes do amortecimento crítico, serem muito pouco dependentes deste amortecimento.

### O Experimento de Pêndulo de Torção após 2002

Em 2002, foi proposto alterar o objetivo do uso do pêndulo de torção na disciplina para o de determinar o momento de inércia de discos em relação ao seu eixo de simetria cilíndrica através do estudo do período do pêndulo em função do comprimento do fio para pêndulos em duas situações distintas: com e sem um anel concêntrico adicional. No caso deste experimento, o torque relevante sobre o pêndulo pode ser considerado como apenas devido ao fio, logo:

$$I \cdot \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = \frac{-k_0}{L} \cdot \mathbf{q} , \quad (4)$$

onde  $I$  é o Momento de Inércia total do pêndulo. A solução da equação (4) permite estabelecer a relação entre o período do pêndulo e o comprimento do fio,  $T^2 = \frac{2 \cdot \mathbf{p} \cdot I}{k_0} \cdot L$ , que corresponde a uma equação de reta do tipo  $y = \mathbf{a} \cdot x + \mathbf{b}$  com  $y = T^2$  e  $x = L$ . O valor esperado para o coeficiente linear  $\mathbf{b}$  é zero, porém, como não é possível determinar com precisão os pontos de fixação do fio, o coeficiente linear obtido nem sempre é compatível com zero. O coeficiente angular  $\mathbf{a}$  estabelece uma relação entre o momento de inércia do pêndulo a constante  $k_0$  que caracteriza o fio.

Usando os coeficientes angulares determinados para as condições do pêndulo sem e com o anel adicional, respectivamente,  $\mathbf{a}_p = \frac{2 \cdot \mathbf{p} \cdot I_p}{k_0}$  e  $\mathbf{a}_{pA} = \frac{2 \cdot \mathbf{p} \cdot (I_p + I_A)}{k_0}$ , o momento de inércia do anel ( $I_A$ ) pode ser calculado em relação ao momento de inércia do pêndulo sem o anel ( $I_p$ ) por:

$$I_A = I_p \cdot \left( \frac{\mathbf{a}_{pA}}{\mathbf{a}_p} - 1 \right). \quad (6)$$

Para a realização do experimento foram confeccionados 30 anéis de latão de massas semelhantes (entre 730 g e 780 g) com 3 distribuições de massa: anéis planos (seção transversal retangular), anéis “côncavos” (seção trapezoidal com base maior externa) e anéis “convexos” (seção trapezoidal com base maior interna). Cada equipe de 2 alunos utiliza um dos tipos de anéis, havendo portanto pelo menos 3 grupos com anéis de mesmo formato em cada sala de aula. Embora as massas das peças não sejam muito diferentes seus momentos de inércia determinados experimentalmente são bastante diferentes, como pode ser visto na Figura 3 onde os anéis foram

agrupados em relação ao seu formato. A flutuação dos momentos de inércia dos anéis de cada tipo (determinada pelo desvio padrão da amostra) é da ordem de 3%, variação esta que é explicada pelas incertezas relativas dos momentos de inércia determinadas por propagação de incertezas que variam entre 2% e 8%. Para 2004 estão sendo preparados novos formatos de anéis de geometria mais simples para que os momentos de inércia possam ser calculados pelos alunos com base em suas dimensões para serem comparados com os resultados determinados experimentalmente através do pêndulo de torção.

