

# COVARIÂNCIAS EM MEDIÇÕES COM MULTÍMETROS DIGITAIS

Elielson Soares Pereira<sup>1</sup>, Zwinglio de Oliveira Guimaraes Filho<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidade de São Paulo, Departamento de Astronomia, Instituto de Astronomia Geofísica e Ciências Atmosféricas (IAG-USP), [elielson.pereira@usp.br](mailto:elielson.pereira@usp.br)

<sup>2</sup> Universidade de São Paulo, Departamento de Física Aplicada, Instituto de Física (IF-USP), [zwinglio@usp.br](mailto:zwinglio@usp.br)

## Resumo

*Nas análises de dados em disciplinas experimentais pouca atenção se dá ao papel da covariância, grandeza fundamental para a validade das análises quando se efetua mais de uma medição. Em experimentos com multímetros digitais a flutuação dos resultados ao redor do comportamento médio é geralmente ordens de grandeza menor do que a precisão indicada nos manuais, o que dificulta a determinação das incertezas dos resultados finais e o uso de testes estatísticos (como o teste de chi-quadrado). Este trabalho descreve um estudo sobre medições com multímetros digitais, com particular atenção para a determinação das covariâncias e de sua importância na análise. Para isso, foram realizados experimentos para a determinação das incertezas e das covariâncias em medições de corrente e de tensão com 140 multímetros digitais simples comumente usados em laboratórios didáticos. Os erros de medição foram estimados pela calibração simultânea destes multímetros em relação a multímetros de precisão calibrados. Esses dados foram utilizados para determinar as incertezas e covariâncias das medições dos multímetros simples. As incertezas obtidas foram bem menores que as calculadas usando as especificações do fabricante e covariâncias positivas com elevados coeficientes de correlação foram obtidas entre medições em uma mesma escala ( $\rho \approx +0,99$ ) e entre em escalas distintas ( $\rho \approx +0,85$ ). A importância dessas covariâncias foi avaliada em um experimento para a determinação da curva de calibração de um resistor, onde se observou que as informações estatísticas obtidas (as incertezas dos parâmetros e o chi-quadrado do ajuste) só são corretas quando as covariâncias são consideradas. Uma proposta de experimento didático de nível universitário para ilustrar as covariâncias é apresentada e testada para outros modelos de multímetros digitais.*

**Palavras-chave:** Multímetros, Laboratórios Didáticos, Covariâncias.

## Introdução

Medições com multímetros digitais são muito usadas em laboratórios didáticos por possibilitarem o estudo experimental de conceitos relacionados a circuitos elétricos e pela importância de ensinar como manusear um multímetro. Nesses experimentos, geralmente são realizadas diversas medições com um mesmo equipamento. Exemplos típicos são os experimentos para a determinação de curvas características de componentes elétricos, como resistores e lâmpadas.

Nesses experimentos é usualmente observada uma discrepância de quase uma ordem de grandeza entre a amplitude da flutuação dos dados ao redor do comportamento médio e as incertezas calculadas considerando-se as especificações fornecidas nos manuais dos fabricantes, o que faz com que os testes

de chi-quadrado resultem em valores muito inferiores aos números de graus de liberdade. Por conta disso as incertezas dos parâmetros da curva característica obtidos por ajustes pelo Método dos Mínimos Quadrados não são confiáveis e testes estatísticos, como o teste de Chi-quadrado, não podem ser utilizados para avaliar a qualidade dos ajustes ou a compatibilidade entre os resultados obtidos e valores de referência.

Embora essa situação seja observada em todos os experimentos envolvendo multímetros digitais em laboratórios didáticos, não há uma forma adequada de lidar com esses resultados nem uma explicação convincente para sua origem. Muitos consideram que as incertezas fornecidas pelo manual estão superestimadas e, portanto, reescalonam as incertezas pelo chi-quadrado ( $\chi^2$ ) de tal modo que este se torne igual ao número de graus de liberdade do ajuste ( $ngl$ ).

Neste caso as incertezas são corrigidas usando  $\sigma_{\text{corrigido}} = \sigma_{\text{original}} \sqrt{\frac{\chi^2}{ngl}}$ .

O objetivo desse trabalho é compreender a origem da discrepância entre a amplitude da flutuação dos dados e as incertezas fornecidas pelos fabricantes com particular interesse na identificação do papel das covariâncias. Inicialmente, é feita uma revisão de conceitos fundamentais de tratamento de dados. Em seguida, as incertezas e correlações em medições com multímetros simples são determinadas por um procedimento similar ao usado da referência [1] para avaliar a incerteza de medições com régua plástica. Posteriormente, o problema da determinação da curva característica de um resistor é usado para ilustrar o efeito das covariâncias e um procedimento simplificado, porém conceitualmente correto, é sugerido para analisar esses dados.

### Revisão de alguns conceitos fundamentais de tratamento de dados experimentais: erros, incertezas e covariâncias.

Embora os cursos de tratamento de dados salientem que a correta consideração das incertezas é fundamental para se determinar a confiabilidade de resultados experimentais e possibilitar a realização de testes de hipóteses, pouca atenção é dada para o papel das covariâncias, embora estas sejam necessárias para garantir a validade dos procedimentos estatísticos de análise de dados envolvendo mais de uma grandeza.

Do ponto de vista formal, o erro,  $\varepsilon$ , é definido como a diferença entre o valor obtido em uma medida,  $x$ , e o valor verdadeiro da grandeza,  $x_0$  [2, 3]:

$$\varepsilon = x - x_0, \quad (1)$$

e o desvio padrão,  $\sigma$ , é a raiz quadrada positiva do valor esperado do erro quadrático médio correspondente:

$$\sigma = \sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle} \quad (2)$$

onde o símbolo  $\langle \dots \rangle$  indica o valor esperado da grandeza<sup>†</sup>.

---

<sup>†</sup> O valor esperado de uma variável aleatória se relaciona com a função densidade de probabilidade,  $f$ , por:  $\langle \varphi \rangle = \int \varphi \cdot f(\varphi) \cdot d\varphi$ . Na prática, o valor esperado pode ser estimado por uma medida de grande exatidão, ou pela média de muitas medições independentes,  $\langle \varphi \rangle \cong \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_k$ .

Enquanto a incerteza de uma grandeza dá informação sobre a provável amplitude do erro cometido, a covariância entre duas grandezas indica o provável efeito de fontes de erro comuns a essas grandezas: uma covariância positiva indica que se uma das grandezas estiver subestimada (isto é, com valor abaixo do valor verdadeiro) a outra provavelmente também estará subestimada, ao passo que uma covariância negativa implica que a superestimação de uma grandeza implica na provável subestimação da outra. Assim, a covariância entre  $x$  e  $y$ ,  $V_{x,y}$ , é definida por:

$$V_{x,y} = \langle \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \rangle \quad (3)$$

de tal forma que o desvio padrão de  $x$  é igual à raiz quadrada positiva da variância  $\sigma_x = \sqrt{V_{x,x}} = \sqrt{\langle \varepsilon_x^2 \rangle}$  (a variância é a covariância de um dado com ele mesmo).

De maneira geral, há covariâncias entre grandezas que são determinadas a partir dos mesmos dados experimentais (por exemplo: os coeficientes linear e angular de uma reta ajustada a um conjunto de dados) e entre grandezas medidas com um mesmo instrumento (exemplo: medições do comprimento de dois objetos com uma mesma régua). A preocupação com a determinação das covariâncias e seus efeitos é o tema de publicações recentes do BIPM [4] (*Bureau International des Poids et Mesures*). A intensidade das covariâncias é mais fácil de ser representada através do coeficiente de correlação,  $\rho$ , definido como:

$$\rho_{x,y} = \frac{V_{x,y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (4)$$

Coefficientes de correlação +1 (-1) implicam que a superestimação de uma das grandezas implica na correspondente superestimação (subestimação) da outra de uma amplitude igual à razão de suas incertezas. A covariância (e o correspondente coeficiente de correlação) entre grandezas estatisticamente independentes é zero. Correlações elevadas são observadas em diversas situações experimentais e, até mesmo, entre padrões de calibração disponíveis na literatura [5].

Devido a essa relação entre as distribuições dos erros envolvendo grandezas estatisticamente correlacionadas, as covariâncias precisam ser consideradas nas expressões de propagação de incerteza. A incerteza de uma quantidade  $F$  calculada a partir de dados  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) é dada por [2, 3]:

$$\sigma_F^2 \cong \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) V_{i,j} = \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N 2 \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j \quad (5)$$

onde as derivadas devem ser calculadas nos valores estimados de  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

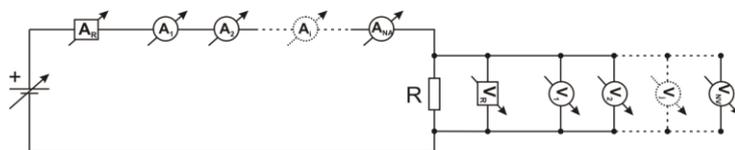
Um exemplo que ilustra o efeito das covariâncias é a incerteza da soma ou da diferença de duas grandezas,  $x_1$  e  $x_2$ , com incertezas iguais ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x$ ). No caso de correlação nula as incertezas da soma e da diferença são  $\sqrt{2} \cdot \sigma_x$ . Porém, no caso de dados covariantes com correlação  $\rho$  a incerteza da soma  $S = x_1 + x_2$  é dada por  $\sigma_S = \sigma_x \sqrt{2(1+\rho)}$  e a incerteza da diferença  $D = x_1 - x_2$  por  $\sigma_D = \sigma_x \sqrt{2(1-\rho)}$ . Assim, se  $x_1$  e  $x_2$  tiverem correlação positiva de 0,8 ( $V_{1,2} = 0,8 \cdot \sigma_x^2$ ) a incerteza da soma aumenta para  $\sigma_S = \sqrt{3,6} \cdot \sigma_x$ , ao passo que a incerteza da diferença é reduzida

para  $\sigma_D = \sqrt{0,4} \cdot \sigma_x$ . O oposto acontece no caso de correlação negativa: a soma nesse caso é mais precisa do que a diferença. Além da expressão da propagação de incerteza, as covariâncias também precisam ser consideradas quando se realizam ajustes e testes estatísticos de hipótese, como o teste de chi-quadrado [6].

### Procedimento Experimental

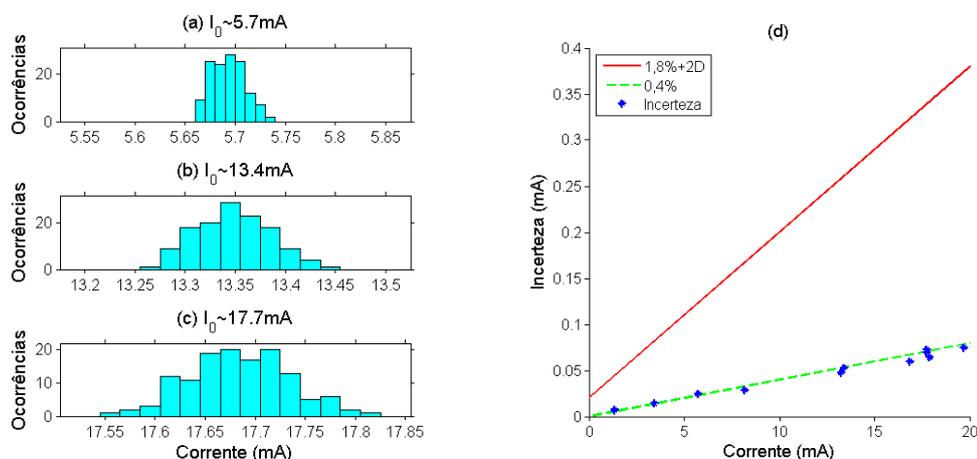
Foram realizados experimentos de calibração simultânea de 140 multímetros digitais novos, modelo Western 978MD de 3,5 dígitos, que foram desembalados e usados pela primeira vez neste experimento. As informações do fabricante indicam que a precisão das medições de corrente com esses multímetros nas escalas de 2 mA, 20 mA e 200 mA são dadas por  $(1,8\% + 2D)$ , o que corresponde a soma de 1,8% do valor medido mais 2 vezes o dígito menos significativo.

Inicialmente os erros das medições de corrente desses multímetros foram estimados por medições simultâneas da corrente em uma ligação em série entre todos eles e um multímetro de acurácia elevada (Tektronix DM5520, de 6,5 dígitos, com acurácia indicada de  $0,05\% + 10D$ ), como mostrado na Figura 1, com  $NA=132$ .



**Figura 1:** Esquema da montagem utilizada para estimar os erros em medições dos multímetros por meio de  $NA$  ligações em série com um amperímetro de precisão e/ou  $NV$  ligações em paralelo com um voltímetro de precisão. [créditos da foto: Paulo R. Pascholati]

O painel esquerdo da Figura 2 apresenta histogramas dos resultados de medições de corrente com 132 multímetros para três valores de corrente.



**Figura 2:** (a-c) Histogramas de medições de correntes na escala de 20 mA. Nos três histogramas, a eixo horizontal abrange intervalos de mesma largura (d): Relação entre a corrente e as incertezas calculadas nesse trabalho (pontos azuis) para medições na escala de 20 mA. A precisão calculada de acordo com o manual é indicada pela linha vermelha.

Observa-se nas Figuras 2(a-c) que a dispersão dos resultados cresce com o aumento da corrente. Isso é mais fácil de ver na Figura 2(d), que apresenta a relação entre o valor da corrente medida pelo multímetro e as incertezas, as quais foram estimadas por:

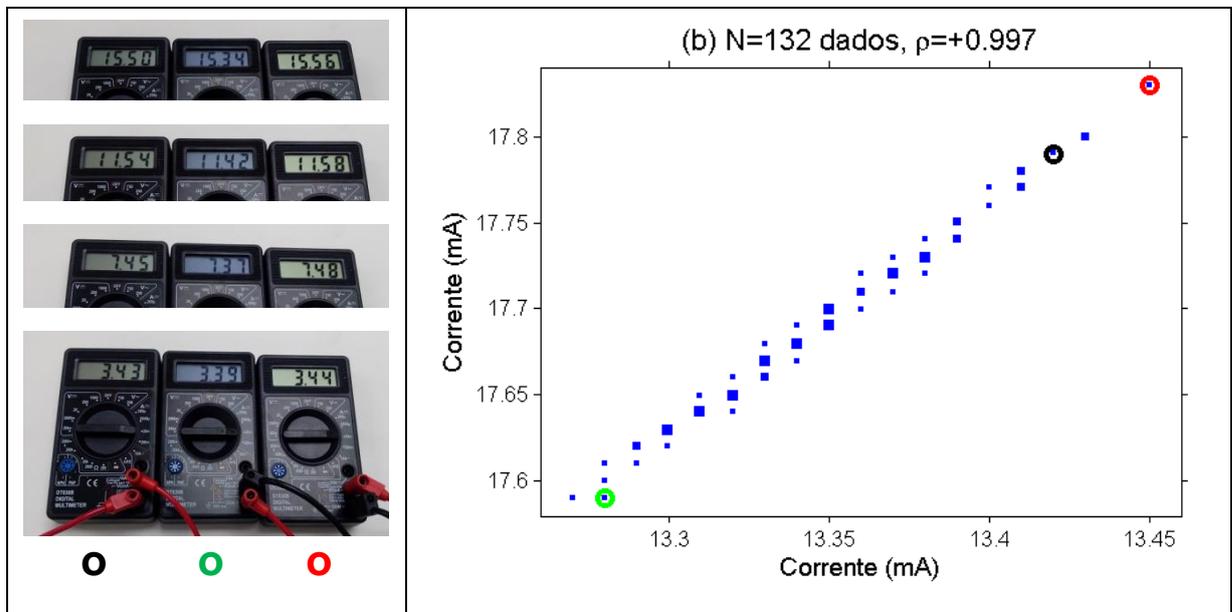
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\varepsilon_k)^2}, \quad (6)$$

onde os erros foram calculados usando a equação (1) e considerando-se a medição do multímetro de precisão como o valor verdadeiro da corrente.

Na Figura 2(d) também é apresentada a precisão calculada considerando-se as informações do fabricante: nota-se claramente que as incertezas das medições são bem menores: para uma corrente  $I$  a incerteza é aproximadamente  $\sigma_I \cong 0,004.I$ . De fato, as especificações de precisão do fabricante não correspondem à incerteza padrão [7], mas são incertezas expandidas para cobrir um intervalo de confiança desejado, usualmente de 99%.

Em princípio, o valor obtido na medição e a incerteza estimada dessa forma, juntamente com a consideração de que a distribuição dos erros é aproximadamente gaussiana, fornecem toda a informação estatística necessária sobre o resultado de uma medição com esses multímetros e possibilitam a plena utilização do resultado. Porém, se mais de uma medição for feita com um mesmo aparelho, as covariâncias também precisam ser conhecidas.

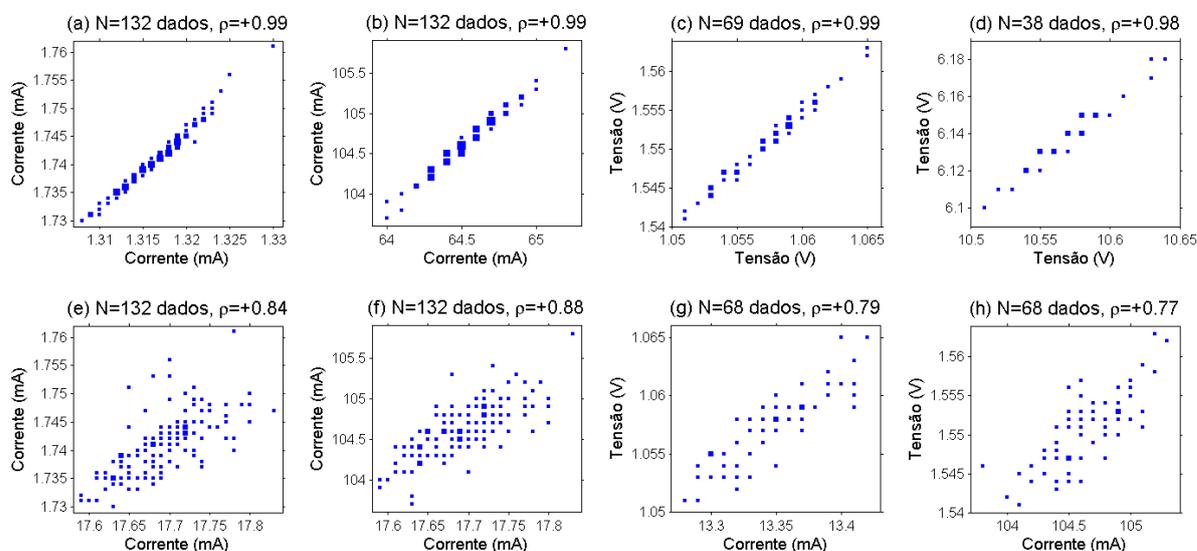
De fato, os erros em medições de correntes distintas feitas com um mesmo instrumento apresentam sempre a mesma tendência, como ilustrado na Figura 3, que mostra as medições de três multímetros em alguns valores de corrente. O multímetro ao centro nessa figura foi escolhido por ser um dos que apresentaram os menores valores dentre todos os multímetros utilizados, enquanto o da direita por ser um dos que apresentavam os valores mais elevados.



**Figura 3:** Ilustração das covariâncias entre medições com um mesmo multímetro. No gráfico da direita é apresentada a distribuição das medições feitas com cada um dos 132 multímetros em dois valores de corrente (~13,4 mA e ~17,7 mA), mostrando a elevada correlação entre essas medições. Os pontos destacados indicam aos dados correspondentes aos multímetros mostrados no painel da esquerda.

Uma representação gráfica da dependência comum dos erros (que é a origem as covariâncias) pode ser vista no gráfico de correlação no painel direito da Figura 3. Esse gráfico mostra uma clara tendência entre os erros de medições distintas feitas com um mesmo aparelho, o que corresponde a uma covariância positiva elevada (o coeficiente de correlação desses dados é +0,99).

Na Figura 4 é apresentada uma compilação das correlações entre as medições dos multímetros em diversos valores de corrente e de tensão envolvendo escalas distintas. Os coeficientes de correlação são geralmente positivos e bastante elevados: os coeficientes de correlação entre as medições em uma mesma escala são de cerca de +0,99, tanto para corrente [Figura 4(a-b)] quanto para tensão [Figura 4(c-d)]. Já para medições em escalas distintas [Figura 4(e-f)] as correlações são cerca de +0,85. Além disso, grandes correlações positivas ( $\sim +0,8$ ) são observadas entre medições de tensão e de corrente [Figura 4(g-h)].



**Figura 4:** Correlações entre as medições obtidas com cada um dos multímetros valores e escalas distintas, mostrando a existência de fortes correlações positivas entre as medições efetuadas com o mesmo multímetro em uma mesma escala (a-d,  $\rho \cong +0,99$ ), em escalas distintas (e-f,  $\rho \cong +0,85$ ) e, até mesmo, quando medindo grandezas distintas (g-h,  $\rho \cong +0,8$ ). As medições de tensão foram realizadas com apenas alguns dos multímetros.

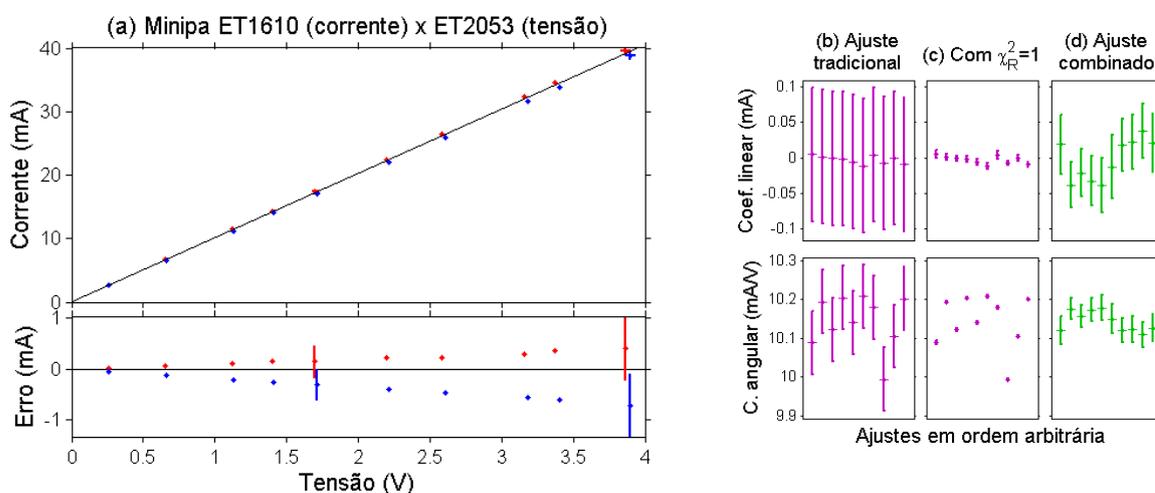
### Proposta de experimento didático sobre covariâncias em multímetros

O efeito das correlações elevadas pode ser visto no experimento para Laboratórios Didáticos em nível universitário que propomos a seguir. Ao invés de cada grupo usar um par de multímetros para determinar a curva característica de um resistor diferente, a ideia é fazer um único circuito coletivo, similar ao mostrado na Figura 1, com todos os multímetros da sala: metade deles ligados em série medindo a corrente total e metade ligados em paralelo com resistor medindo a tensão sobre o resistor. Nos exemplos mostrados a seguir, foram utilizados  $N_A=N_V=10$  multímetros.

Cada grupo fica responsável por registrar e analisar os dados de um par de multímetros, como em um experimento tradicional. Inicialmente se considera a informação de precisão do fabricante como estimativa de incerteza, sem considerar as covariâncias. Isso faz com que os valores de chi-quadrado dos ajustes sejam ordens de grandeza inferiores ao número de graus de liberdade: nos testes

realizados com diversos tipos de multímetros existentes nos Laboratórios Didáticos do IFUSP os valores dos Chi-quadrados obtidos foram cerca de um milésimo do número de graus de liberdade ( $\chi_R^2 \cong 0,001$ ). Convém lembrar que a diferença entre a incerteza e a especificação de precisão do fabricante mostrada na Figura 2 (um fator menor que 5) não pode explicar esses valores tão baixos de chi-quadrado.

De fato, isso se deve às elevadas covariâncias entre os resultados de medições feitos com um mesmo aparelho, que fazem com que a amplitude das flutuações dos dados ao redor do comportamento médio seja muito menor que as incertezas, uma vez que os erros cometidos em todas as medições feitas com um mesmo multímetro seguem um mesmo padrão e praticamente não produzem flutuação. O efeito das covariâncias pode ser visualizado na Figura 5(a), que mostra que os dados das curvas características ficam muito bem alinhados, embora os coeficientes angulares obtidos com pares distintos de multímetros são muito diferentes uns dos outros Figura 5(b-c).



**Figura 5:** (a) Curvas características de resistores com multímetros e respectivos erros. Os pontos em azul e em vermelho correspondem a diferentes pares de multímetros e a linha em preto foi calculada usando a resistência equivalente (só as barras de erro do quinto e do último ponto foram mostradas). (b-d) Valores dos coeficientes em ajustes (b) tradicionais, (c) com correção da incerteza pelo  $\chi^2$ , e (d) combinando multímetros diferentes.

Devido às covariâncias, as incertezas dos parâmetros ajustados estão erradas e o teste de chi-quadrado não pode ser utilizado para corrigir as incertezas, uma vez que os dados não são estatisticamente independentes. De fato, a incerteza fornecida pelo ajuste para o coeficiente linear é cerca de 10 vezes maior que a real [Figura 5(b)]. Por outro lado, quando as incertezas são corrigidas pelo  $\chi^2$  a incerteza do coeficiente angular se torna cerca de 20 vezes menor que a real [Figura 5(c)].

Para contornar esse problema e para salientar o papel das correlações, propomos uma solução conceitual para esse problema: realizar um novo ajuste da curva característica usando apenas uma informação experimental de cada multímetro. Nesse caso os dados são estatisticamente independentes, o que permite corrigir as incertezas pelo  $\chi^2$ . Isso possibilita obter resultados estatisticamente adequados para os dois coeficientes ajustados [Figura 5(c)]. Uma solução mais completa do problema seria fazer os ajustes com incertezas e covariâncias corretas, porém, isso exigiria um estudo completo sobre as incertezas e covariâncias para o modelo de multímetro utilizado.

## Conclusão

A existência de covariâncias elevadas entre as medições realizadas com um mesmo equipamento é recorrente em atividades experimentais e precisa ser discutida nos laboratórios didáticos de nível universitário. Como mostrado nesse trabalho para o caso da determinação da curva característica de resistores com multímetros digitais, ignorar as covariâncias pode levar a resultados com incertezas erradas por fatores maiores do que 10.

Um ponto a ser salientado é que as covariâncias podem tanto aumentar quanto diminuir as incertezas dos valores calculados, de tal modo que há situações em que a realização de medições com um mesmo equipamento possibilita reduzir a incerteza do resultado final, ampliando a sensibilidade do experimento. Um exemplo é a medida da diferença entre a tensão de duas pilhas: usando um mesmo multímetro a incerteza é muito menor do que com multímetros distintos (pois,  $\sigma_D = \sigma_x \sqrt{2(1-\rho)}$ ). Por outro lado, a incerteza na soma das tensões das duas pilhas é maior quando se utiliza o mesmo multímetro ( $\sigma_S = \sigma_x \sqrt{2(1+\rho)}$ ).

## Agradecimentos:

Os autores agradecem aos técnicos dos Laboratórios Didáticos do IFUSP pelo empréstimo dos multímetros estudados, aos técnicos do LAMFI, do LAL e da oficina eletrônica do DFEP-IFUSP pelo empréstimo dos multímetros de precisão e das baterias usadas como fonte de alimentação, ao professor Paulo Pascholati pelo auxílio para fotografar o arranjo experimental, aos professores Vito Vanin, Otaviano Helene e Ruy M. Castro pela revisão do manuscrito e a todos que nos auxiliaram na coleta dos mais de cinco mil dados experimentais usados neste trabalho. Z.O.G.-F. agradece o suporte financeiro parcial do CNPq (processo: 308330/2013-7).

## Referências

- [1] O. Helene, S. P. Tsai e R. P. Teixeira, *O que é uma medida?*, Rev. Bras. Ensino de Física **13** (1991) 12. ( <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/vol13a02.pdf> )
- [2] O. Helene e V.R. Vanin, *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*, Ed. Edgard Blücher, 2ª Edição, 1991.
- [3] BIPM, *GUM 2008: Guia para a expressão da incerteza de medição*, 1ª Edição brasileira do BIPM de 2008, INMETRO 2012 (disponível em [http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/gum\\_final.pdf](http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/gum_final.pdf) ).
- [4] BIPM, *Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Extension to any number of output quantities* (disponível em <http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html> ).
- [5] Z.O. Guimarães-Filho, *Energias de raios gama padrões: suas covariâncias e relações com as constantes fundamentais*, tese de doutoramento, IFUSP 2004.
- [6] O. Helene, *Método dos Mínimos Quadrados com formalismo matricial*, Ed. Livraria da Física, 2006.
- [7] FLUKE Application note, *Understanding Specifications for Precision Multimeters*, (disponível em <http://us.flukecal.com/literature/articles-and-education/data-acquisition-and-test-equipment/application-notes/understandin> ).