



Capítulo IX – Distribuição de Poisson

- Definição da Distribuição de Poisson
- Significado do parâmetro μ
- Propriedades da Distribuição de Poisson
- Aproximação Gaussiana da Distribuição de Poisson
- O problema do Ruído de Fundo (Background)

155

Definição da Distribuição de Poisson



- A distribuição de Poisson descreve resultados de experiências nos quais contamos **acontecimentos** que **ocorrem aleatoriamente mas a uma taxa média definida**. Por exemplo: as contagens de um decaimento radioactivo ou o nº de bebés que nasce por mês num determinado hospital.
- Consideremos uma amostra radioactiva e um detector adequado e em bom estado, com o qual pretendemos contar o nº de partículas emitidas, v , num intervalo de tempo de 2 minutos. Estando o detector a funcionar bem, o valor de v não terá incerteza associada.
- Se repetirmos a experiência, obteremos, quase seguramente, um nº diferente para v .
- Essa **variação** obtida **em v** não reflecte incerteza na contagem mas antes o **carácter intrinsecamente aleatório** do processo de decaimento radioactivo.
- Cada núcleo radioactivo de uma dada espécie química tem uma probabilidade definida de decair em qualquer intervalo de dois minutos. Se conhecêssemos essa probabilidade e o nº de núcleos radioactivos na nossa amostra, poderíamos calcular o nº médio esperado de decaimentos nos dois minutos. Contudo, cada núcleo decai num instante aleatório e, em qualquer intervalo de dois minutos, o nº de decaimentos pode ser diferente do nº médio esperado.

156

- Podemos fazer a pergunta: se repetirmos a nossa experiência muitas vezes, que tipo de distribuição devemos esperar para o nº de contagens, v , observado nos dois minutos? Diremos que a distribuição esperada é uma distribuição binomial. Se existirem n núcleos e se for p a probabilidade de um qualquer núcleo decair, então a probabilidade de v decaimentos é apenas a probabilidade de v sucessos em n tentativas ou $B_{n,p}(v)$.
- Neste tipo de experiência podemos, contudo, fazer uma simplificação importante. O nº de tentativas, ou seja, de núcleos, é enorme (n pode ser da ordem de 10^{20}). Nestas circunstâncias, n grande e p pequeno, pode mostrar-se que a distribuição binomial é indistinguível de uma função mais simples designada por distribuição de Poisson:

$$\text{Prob}(v \text{ contagens em qualquer intervalo definido}) = P_{\mu}(v)$$

sendo $P_{\mu}(v)$ a distribuição de Poisson dada por:

$$P_{\mu}(v) = e^{-\mu} \frac{\mu^v}{v!} \quad (9.1)$$

onde μ é um parâmetro positivo.

157

Significado do parâmetro μ

- Não vamos derivar a distribuição de Poisson. Vamos apenas mostrar que é a distribuição adequada para este tipo de experiências.
- Para estabelecermos o significado do parâmetro μ na eq. 9.1, temos que calcular o nº médio de contagens, \bar{v} , que seria esperado se nós repetíssemos a experiência muitas vezes. Esta média é determinada somando todos os valores possíveis de v , cada um multiplicado pela sua probabilidade:

$$\bar{v} = \sum_{v=0}^{\infty} v P_{\mu}(v) = \sum_{v=0}^{\infty} v e^{-\mu} \frac{\mu^v}{v!} \quad (9.2)$$

O 1º termo da soma pode ser abandonado porque é nulo; $\frac{v}{v!}$ pode ser substituído por $1/(v-1)!$. Se passarmos para fora do somatório o factor comum $\mu e^{-\mu}$, obtemos:

$$\bar{v} = \mu e^{-\mu} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu^{v-1}}{(v-1)!} \quad (9.3)$$

158



$$\bar{v} = \mu e^{-\mu} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu^{v-1}}{(v-1)!}$$

- A soma infinita corresponde a:

$$1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \dots = e^{\mu} \quad (9.4)$$

e, portanto, o factor $e^{-\mu}$ é cancelado por esta soma. Concluimos então que:

$$\boxed{\bar{v} = \mu} \quad (9.5)$$

ou seja, o parâmetro μ que caracteriza a distribuição de Poisson $P_{\mu}(v)$ é exactamente o nº médio de contagens que esperamos obter se repetirmos a experiência muitas vezes.

- Por vezes, conhecemos à partida a taxa média R à qual devem ocorrer os acontecimentos que estamos a medir. Nesse caso, o nº médio de eventos esperado num tempo T é

$$\mu = \text{taxa} \times \text{tempo} = RT$$

- Inversamente, se a taxa é desconhecida, então, contando o nº de acontecimentos ocorridos num tempo T , podemos obter uma estimativa de μ e, portanto, da taxa R , através de $R_{\text{best}} = \mu_{\text{best}}/T$.

159

Propriedades da Distribuição de Poisson



- A distribuição de Poisson, $P_{\mu}(v)$ dá a probabilidade de obter o resultado v numa experiência na qual contamos eventos que ocorrem aleatoriamente mas a uma taxa média definida.
- Vimos que o parâmetro μ é precisamente a contagem média esperada, \bar{v} .
- Qual é o desvio padrão desse nº v de contagens quando repetimos a experiência muitas vezes?
- O desvio padrão de qualquer distribuição (depois de um nº elevado de tentativas) é a raiz do valor médio dos desvios relativamente à média, ou seja:

$$\sigma_v^2 = \overline{(v - \bar{v})^2} \quad (9.6)$$

que se pode mostrar ser igual a

$$\sigma_v^2 = \bar{v}^2 - (\bar{v})^2 \quad (9.7)$$

160



- Para a distribuição de Poisson já vimos que $\bar{v} = \mu$ e um cálculo semelhante dá $\overline{v^2} = \mu^2 + \mu$. Então a equação anterior dá $\sigma_v^2 = \mu$. Logo:

$$\sigma_v = \sqrt{\mu} \quad (9.8)$$

Ou seja, a distribuição de Poisson com contagem média μ tem desvio padrão $\sqrt{\mu}$.

- Se realizarmos uma experiência de contagens uma vez e obtivermos a resposta v , podemos ver facilmente (usando o princípio da máxima probabilidade) que a melhor estimativa para a contagem média esperada é $\mu_{\text{best}} = v$.
- Da equação acima segue imediatamente que a melhor estimativa para o desvio padrão é \sqrt{v} . Por outras palavras, se fizemos uma medida do nº de acontecimentos num intervalo de tempo T e obtivermos a resposta v , a nossa resposta para a contagem média esperada no tempo T é

$$\text{Nº médio de eventos num tempo } T: v \pm \sqrt{v} \quad (9.9)$$

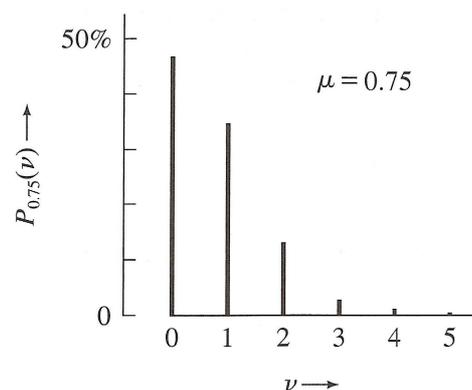
Regra da Raiz Quadrada

161

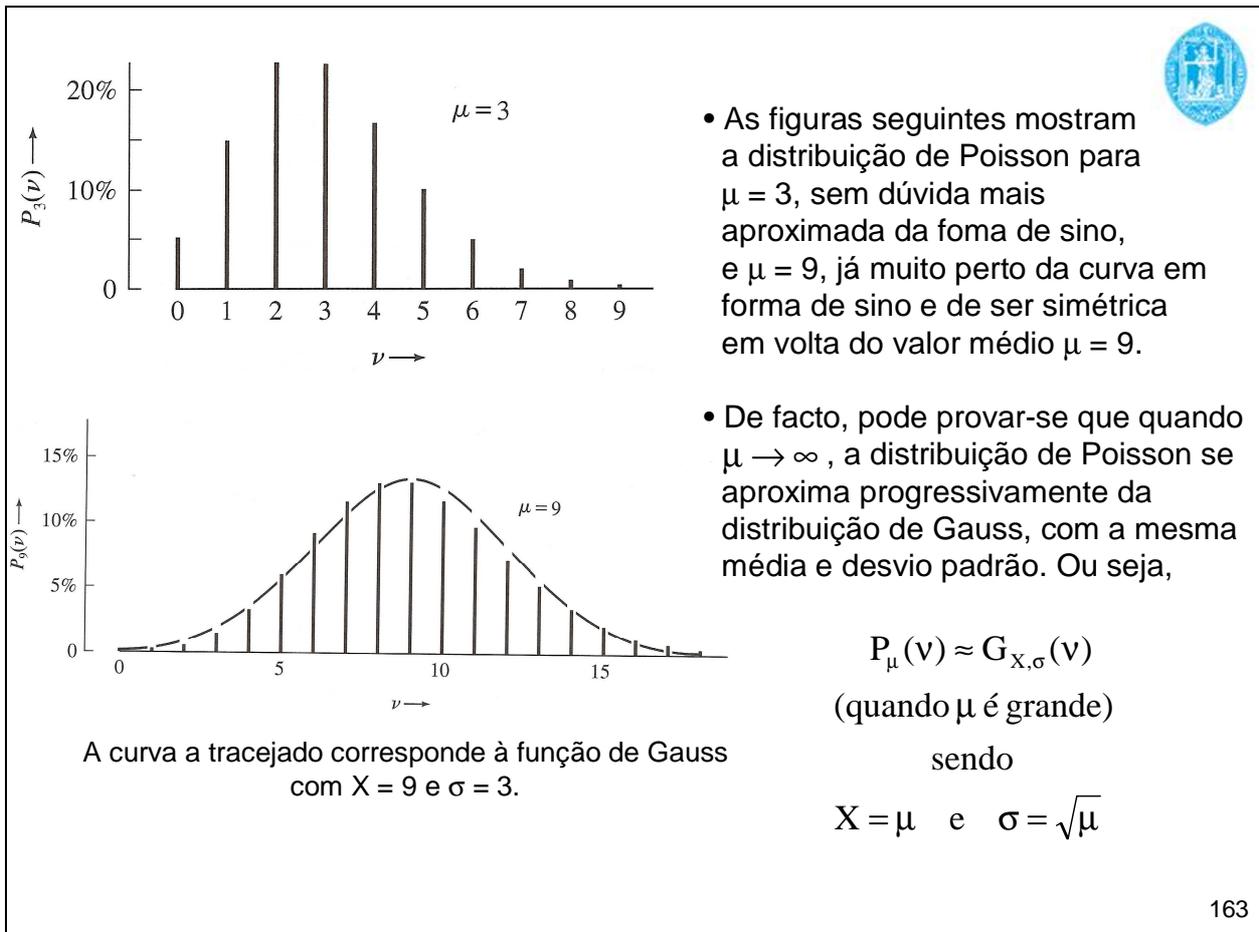
Aproximação Gaussiana da Distribuição de Poisson



- A distribuição de Gauss $G_{X,\sigma}(x)$ dá a probabilidade dos diferentes valores possíveis de uma variável *continua* x . Pelo contrário, a distribuição de Poisson $P_\mu(v)$, tal como a distribuição Binomial $B_{n,p}(v)$, dá as probabilidades de uma variável *discreta* $v = 0, 1, 2, 3, \dots$.
- Outra diferença importante é que a distribuição de Gauss é especificada por 2 parâmetros, a média X e o desvio padrão σ , enquanto a distribuição de Poisson é especificada por um único parâmetro, a média μ , porque a largura da distribuição de Poisson é automaticamente determinada pela média, uma vez que $\sigma_v = \sqrt{\mu}$.
- Finalmente, a distribuição de Gauss tem sempre a forma de sino, sendo simétrica em torno do seu valor médio, enquanto a distribuição de Poisson não tem nenhuma destas características em geral, como se pode ver na figura.



162



163

O problema do Ruído de Fundo (Background)

- Um problema que complica muitas medidas experimentais é o facto de existirem acontecimentos de fundo que não conseguimos distinguir dos acontecimentos que nos interessam e que são também detectados. Por exemplo, quando estudamos desintegrações de uma fonte radioactiva, não conseguimos impedir o detector de detectar partículas de outras fontes radioactivas na vizinhança ou até de raios cósmicos. Isto significa que os n° s que detectamos incluem a parte que nos interessa mais os eventos de fundo.
- A solução do problema é 1^o) realizar a experiência; 2^o) remover a fonte radioactiva e medir apenas a radiação de fundo; 3^o) subtrair o fundo das contagens totais obtidas.
- Na prática o problema surge porque é geralmente útil realizar a medida total e a medida só do fundo durante tempos diferentes e, em geral, cometem-se erros, especialmente na análise de erros.
- Suponhamos que medimos um total de v_{tot} acontecimentos (fonte mais fundo) num tempo T_{tot} e que depois medimos os acontecimentos do fundo, v_{fd} durante um tempo T_{fd} .

164



- É claro que não podemos subtrair simplesmente as duas quantidades, uma vez que dizem respeito a tempos diferentes. Em vez disso, devemos calcular as taxas e subtraí-las:

$$R_{\text{tot}} = \frac{V_{\text{tot}}}{T_{\text{tot}}} \quad \text{e} \quad R_{\text{fd}} = \frac{V_{\text{fd}}}{T_{\text{fd}}}$$
$$R_{\text{fonte}} = R_{\text{tot}} - R_{\text{fd}}$$

- Para estimar as incertezas nas quantidades envolvidas, devemos lembrar que a regra da raiz quadrada dá as incertezas nos números medidos v_{tot} e v_{fd} . Devemos, portanto, calcular as incertezas nas taxas através da propagação de erros.