CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DE ERROS

Prof. Dr. Manfredo Harri Tabacniks

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Revisão: Profa. Dra. Ewa Shibulska
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Edição: Shila e Giuliano S. Olguin

São Paulo, 2003
Revisado pelo autor em 2007

NOTA DO AUTOR: O presente texto tem por objetivo servir de apoio inicial no estudo e utilização da teoria de erros para a expressão da incerteza de uma medição. O assunto é tema de livros muito mais abrangentes, como os citados na bibliografia, que devem ser buscados pelo leitor mais exigente ou interessado em aprofundar seus conhecimentos. Na definição e nome dos termos técnicos foi adotado como norma o "Guia para Expressão da Incerteza de Medição, ABNT, INMETRO, SBM, Rio de Janeiro, Ed. Revisada 1998".

“embora este guia forneça um esquema de trabalho para obter a incerteza de uma medição, ele não pode substituir o pensamento crítico, a honestidade intelectual e a habilidade profissional.A avaliação da incerteza não é uma tarefa de rotina, nem um trabalho puramente matemático. Ela depende do conhecimento detalhado da natureza do mensurando e da medição. Assim, a qualidade e a utilidade da incerteza apresentada para o resultado de uma medição dependem, em última instância, da compreensão, da análise crítica e da integridade daqueles que contribuiram para atribuir lhe um valor.”

Tradução de um trecho do “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements”, International Organization for Standardization, Geneva, (1993)

1. EXPRESSÃO DE MEDIÇÕES EXPERIMENTAIS

1.1. Introdução

A palavra *incerteza*, como usada nesse guia, significa dúvida. Expressa a dúvida na validade do resultado de uma medição. Em geral, a incerteza consiste de vários componentes que podem ser agrupados em duas categorias gerais:

a) os que podem ser avaliados com auxílio de métodos estatísticos;
b) os que necessitam de outros meios.

Esse texto tratará basicamente dos componentes que podem ser estimados por métodos estatísticos.

O valor de uma grandeza submetida a medição costuma ser adquirido através de um procedimento que, em geral, envolve algum(s) instrumento(s) de medição. O próprio processo de medição, assim como o instrumento utilizado, tem limites de *precisão*[1] e *exatidão*[2], ou seja, toda medição realizada tem uma incerteza associada que procura expressar a nossa ignorância (no bom sentido) do valor medido. A seleção do processo de medição, do instrumento usado e a *reprodutibilidade*[3] da grandeza medida têm que ser expressas de alguma forma. Em alguns aparelhos, por exemplo, a incerteza do instrumento já vem marcada no painel ou no manual, caso contrário, a metade da menor divisão da escala é um bom começo. Note que nada sabemos ainda sobre a reprodutibilidade do processo de medição.

A incerteza é importante na hora de comparar resultados. Na tabela abaixo temos os resultados de duas medições de uma mesma grandeza com diferentes aparelhos e o valor do padrão (nesse caso sem incerteza).

Medida	Viscosidade (g cm^{-1} s^{-1})
A	$9,8 \pm 0,2$
B	$12,3 \pm 4,0$
Padrão	9,3

Na tabela, o valor de u na expressão " $m \pm u$ " indica a incerteza da medida. O intervalo $[m\text{-}u, m+u]$ é denominado intervalo de confiança e tem, em geral, uma probabilidade associada de que a medida m caia dentro da faixa de valores definida pelo intervalo. No caso acima, apesar da medida A estar aparentemente mais próxima do padrão, sua incerteza e respectivo intervalo de confiança, indica um provável *erro de medida*[4], enquanto que o valor da medida B, apesar de ter uma incerteza maior, concorda com o valor do padrão.

1.2. Algarismos significativos

Em medições físicas é facil encontrar uma extensão de valores muito grande. O raio de um átomo comparado ao raio do universo é só um exemplo entre tantos. Para expressar esses valores adequadamente, é conveniente o uso da notação científica. Na notação científica, o valor da medição é expresso com auxílio de potências de dez. Escreve-se o valor da medição em forma decimal com apenas um dígito diferente de zero antes da vírgula, completando com algarismos decimais necessários (eventualmente truncando e arredondando o valor em alguma casa decimal) e multiplicando tudo pela potência de dez adequada. Por exemplo, o comprimento de uma estrada vale 14269513 mm ou, usando notação científica e mantendo apenas os *algarismos significativos* $1,427 \times 10^7$ mm. Note que se usaram apenas três algarismos após a vírgula sendo que

---

[1] Apesar de formalmente antônimos, *incerteza* e *precisão* costumam ser tratados como sinônimos. Representam a componente estatística da dispersão dos resultados de uma medição.

[2] *Exatidão* é o grau de concordância entre o resultado da medição e o valor verdadeiro do mensurando.

[3] *Reprodutibilidade* é o grau de concordância entre medidas efetuadas sob as mesmas condições.

[4] *Erro de medida* é a discordância de uma medição relativamente ao seu valor verdadeiro.

o último foi arredondado para “cima” uma vez que 1,4269 está mais próximo de 1,427 que de 1,426. A regra de arredondamento aqui proposta é a de arredondar o último dígito para “cima” caso o próximo dígito seja ≥5, mantendo-o caso contrário[5]. Note que ao truncar e arredondar as casas decimais, perdemos algo da informação inicial, mas isso pode ser remediado usando quantos algarismos forem necessários depois da vírgula, como por exemplo, $1,4269513 \times 10^7$ mm reproduz o valor com toda a precisão inicial (se é que a estrada foi de fato medida com precisão milimétrica)

Denomina-se *algarismo significativo* o número de algarismos que compõe o valor de uma grandeza, **excluindo eventuais os zeros à esquerda** usados para acerto de unidades. Mas atenção: **zeros à direita são significativos**. Na tabela a seguir um mesmo valor, de diferentes medições de uma mesma grandeza, *X*, foi escrito com diferente número de algarismos significativos. O algarismo significativo mais a direta é denominado *algarismo significativo duvidoso*. É sobre ele que em geral incide nossa incerteza. Na tabela, o algarismo significativo duvidoso foi ressaltado em negrito.

medição	*X* (m)	significativos
X1	57,89**6**	5
X2	5,7**9**x10^1	3
X3	5,78960**0**x10^1	7
X4	0,**6**x10^2	1

Caso o valor da última medição X4, com apenas um significativo fosse convertido para milímetros, seria escrito como X4 = 0,**6** x 10^5 mm ou X4 = **6** x 10^4 mm (em notação científica), muito diferente de 60**0** x 10^2 mm cujo valor tem agora tres algarismos significativos o que aumentou indevidamente a precisão do valor original de X4, com apenas um algarismo significativo.

A escolha de quantos algarismos significativos serão usados para expressar o valor de uma medição depende da grandeza, do processo de medida e do instrumento utilizado. Na realidade, o número de significativos no resultado de uma medição é determinado pela sua incerteza. Para a expressão do número de significativos no valor de uma grandeza adaptaremos a convenção sugerida por Vuolo (1992).

O NÚMERO DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS NO RESULTADO DE UMA MEDIÇÃO
É DETERMINADO PELA SUA INCERTEZA

Um outro exemplo é ilustrado a seguir: Suponha que se deseje medir o tamanho do besouro na Figura 1.1

Figura 1.1. Medindo o tamanho de um besouro.

Uma vez decidido o que caracteriza o tamanho do besouro, qual das alternativas abaixo melhor caracteriza a medida do tamanho do besouro?

a) Entre 0 e 1 cm
b) Entre 1 e 2 cm
c) Entre 1,5 e 1,6 cm
d) Entre 1,54 e 1,56 cm
e) Entre 1,546 e 1,547 cm

---

5 Existem outras regras de arredondamento, mais complicadas, um pouco mais precisas, mas nenhuma é exata. A regra aqui proposta é também usada pela maioria das calculadoras e algoritmos em computadores.

Você acertou se optou pela alternativa d). Isso porque, na leitura de uma escala, o algarismo significativo mais à direita de um número deve sempre ser o duvidoso (não esqueça: o algarismo duvidoso também é significativo!). Resumindo: Qualquer medida por comparação entre um objeto e uma escala deve incluir além dos dígitos exatos (1,5 nesse caso) uma estimativa do algarismo duvidoso. Uma vez que a régua foi marcada em milímetros você deve estimar o comprimento fracionário (em décimos de mm) que melhor expressa sua medição. Você pode não precisar se o valor é 1,54, 1,55 ou mesmo 1,56. **Essa é a expressão da sua incerteza**.

Só para confirmar: Qual o diâmetro da moeda na Figura 1.2?

Figura 1.2. Medindo o diâmetro de uma moeda.

a) Entre 0 e 2 cm
b) Entre 1 e 2 cm
c) Entre 1,9 e 2,0 cm
d) Entre 1,92 e 1,94 cm
e) Entre 1,935 e 1,945 cm

No exemplo acima podemos afirmar que a metade da menor divisão é uma estimativa da nossa incerteza: portanto o diâmetro da moeda pode ser expresso como:

1,92 ± 0,05 cm
1,92(5) cm

1.2.1. EXPRESSÃO DA INCERTEZA.

Como expressar a incerteza no resultado de uma medição? Ou, posto de outra forma: **quantos significativos** devem ter a incerteza de uma medida? Usaremos a seguinte convenção[6]:

- Se o primeiro dígito significativo da incerteza for menor que 3, usaremos DOIS significativos.
- Caso o primeiro dígito significativo da incerteza for maior ou igual a 3, podemos usar UM ou DOIS algarismos significativos para a incerteza;

*Resumindo: qualquer que seja o caso **sempre** podemos usar **dois significativos** para expressar a incerteza. Mas atenção: quando a incerteza for resultado de uma estimativa ou apenas indicativa, tal como a metade da menor divisão de um instrumento, sugerimos usar apenas UM dígito significativo. Não tem sentido, por exemplo, expressar a incerteza de uma régua milimetrada com DOIS significativos (0,50mm), basta escrever 0,5mm.*

1.2.2. EXPRESSÃO DO VALOR DE UMA GRANDEZA

- O resultado de uma medição pode ser expresso como um valor, seguido de sua incerteza, ambos multiplicados por uma potência de dez e a unidade de medida física correspondente: por exemplo $X = (1{,}34 \pm 0{,}04)\ 10^2$ km.
- Usar a <u>mesma potência de dez</u> tanto para o valor da grandeza como para sua incerteza;
- O número de algarismos significativos da incerteza é dado pela regra 1.2.1. acima;
- O número de dígitos decimais no resultado de uma medição tem que ser o mesmo que na incerteza;
- A notação científica pode ser usada para melhor legibilidade.

---

[6] Conforme Vuolo (1992) e Inmetro (1998).

Veja alguns exemplos a seguir. Note o casamento do número de casas decimais na incerteza e no valor do mensurando. Mais uma vez ressaltamos que **zeros à direita são significativos**.

notação errada	notação correta
$5{,}30 \pm 0{,}0572$	$5{,}30 \pm 0{,}06$
$124{,}5 \pm 11$	125 ± 11
$0{,}0000200 \pm 0{,}0000005$	$(200{,}0 \pm 5{,}0)\mathrm{x}10^{-7}$
$(45 \pm 2{,}6)\mathrm{x}10^{1}$	$(45 \pm 3)\ \mathrm{x}\ 10^{1}$ ou $45{,}0 \pm 2{,}0$

1.3. Definições

O texto a seguir foi adaptado do Guia para Expressão da Incerteza de Medição publicado pelo INMETRO (1998). Infelizmente, definições e normas metrológicas são um assunto um tanto burocrático, mas fazem parte da linguagem técnico-científica que precisamos dominar. Não houve de modo algum a pretensão de exaurir o assunto. Ao leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos ou ansioso por outros exemplos, recomendamos fortemente consultar a referência citada.

1.3.1. Medição

Medição é uma ação, é um procedimento. O objetivo de uma **medição** é determinar o **valor** do **mensurando**, isto é, o valor da **grandeza específica** a ser medida. Uma medição começa, portanto, com uma especificação apropriada do mensurando, do **método de medição** e do **procedimento de medição**. O **resultado de uma medição** é a **medida**.

Medição: conjunto de ações que têm por objetivo determinar um valor de uma grandeza.

Valor (de uma grandeza): expressão quantitativa de uma grandeza específica, geralmente sob a forma de uma unidade multiplicada por um número. *Exemplo: comprimento de uma barra: 5,34m*

Mensurando: grandeza específica submetida à medição. *Exemplo: temperatura de fusão da glicerina.*

Grandeza (mensurável): atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado. O termo “grandeza” pode se referir a uma grandeza em sentido geral (*comprimento, tempo, massa.*) ou **grandeza específica** (*comprimento de uma barra, resistência elétrica de um fio*). Os símbolos das grandezas estão definidos na norma ISO 31.

Método de medição: seqüência lógica de operações, descritas genericamente, usadas na execução das medições. *Exemplos: método de substituição, método diferencial, método de “zero”...*

Procedimento de medição: conjunto de operações, descritas especificamente, usadas na execução de medições particulares de acordo com um dado método. *Um procedimento (de medição) deve ser um documento com detalhes suficientes para permitir que um observador execute a medição sem informações* ***adicionais.***

1.3.2. Resultado de uma medição

Em geral, o **resultado de uma medição** é somente uma aproximação ou **estimativa** do valor do mensurando e, assim, só é completa quando acompanhada pela declaração de **incerteza** dessa estimativa. Em muitos casos, o resultado de uma medição é determinado com base em séries ou conjunto de observações obtidas sob **condições de repetitividade**.

Medida ou resultado de uma medição : valor atribuido a um mensurando obtido por medição. Deve-se indicar claramente se o resultado se refere à *indicação*, se é um *resultado corrigido* ou *não corrigido* e se corresponde ao *valor médio de várias medições*. A expressão completa do resultado de uma medição inclui informações sobre a incerteza da medição.

Estimativa: valor de uma estatística (*uma conta*) utilizada para estimar um parâmetro (*uma média, por exemplo*) da totalidade de ítens (*em geral finito*), obtido como resultado de uma operação sobre uma amostra *(em geral um conjunto limitado de dados*) supondo um determinado modelo estatístico de distribuição (*distribuição normal ou Gaussiana, por exemplo*).

Repetitividade (de resultados de medições): grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de medição. **Condições de repetitividade** incluem:
- mesmo procedimento de medição
- mesmo observador
- mesmo instrumento de medição sob as mesmas condições
- mesmo local
- repetição em curto período de tempo

1.3.3. Erros e incertezas

Deve-se atentar e distinguir com cuidado os termos "*erro*" e "*incerteza*". Esses termos não são sinônimos, ao contrário, representam conceitos completamente diferentes. Não devem ser confundidos nem mal empregados.

Erro Uma medição tem imperfeições que dão origem a um erro no resultado da medição. O erro de uma medição é sua diferença para o valor verdadeiro (que em geral não é acessível). O erro de uma medição costuma ser classificado em dois componentes: erro aleatório e erro sistemático. O erro aleatório tem origem em variações imprevisíveis também chamados efeitos aleatórios. Essses efeitos são a causa de variações em observações repetidas do mensurando. O erro aleatório não pode ser compensado, mas pode ser reduzido aumentando o número de observações. Apesar de freqüentemente citado, o desvio padrão da média não é o erro aleatório da média. *O desvio padrão da média representa, sim, uma medida da incerteza da média* devido aos efeitos aleatórios. O erro sistemático, em geral, não pode ser eliminado, mas pode eventualmente ser reduzido modificando o processo de medição ou, caso seja identificado, deve ser corrigido.

Incerteza (da medida). Parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. O parâmetro pode ser um desvio padrão[7] (ou um múltiplo dele) ou a metade do intervalo de uma escala. Uma dada incerteza corresponde, em geral a um dado nível de confiança (probabilidade de encontrar o valor num dado intervalo). Entende-se que o resultado de uma medição (uma medida) é a melhor estimativa do valor de um mensurando e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, contribuem para a dispersão. Em geral a incerteza de uma medição consiste de vários componentes que podem ser agrupados em duas categorias gerais: os que podem ser avaliados com auxílio de métodos estatísticos e os que necessitam de outros meios.

1.4. Estatísticas

Quando se trabalham com vários resultados de uma medição em condições de repetitividade, usam-se procedimentos matemáticos denominados *estatísticas* para resumir e consolidar as informações obtidas. Por

---

[7] Desvio padrão será definido no próximo ítem, 1.4.

exemplo: ao medir várias vezes o tempo de queda de um corpo obtemos, em geral, um conjunto de medidas cujos valores diferem entre si. Qual é o valor que melhor representa a medida do tempo de queda do corpo? Qual sua incerteza? Poderíamos, em princípio, usar apenas uma medida e associar lhe a incerteza do aparelho, como por exemplo, a metade da menor divisão da escala do cronômetro utilizado. *Mas a incerteza da escala do cronômetro descreve apenas os erros cronômetro (os erros aleatórios, de seu mecanismo por exemplo e os sistemáticos como o decorrente de sua calibração contra um padrão mais exato). Portanto, a incerteza da escala de um cronômetro não cobre a incerteza do processo de medição (reação do operador, leitura da escala, etc.)*. O problema que se coloca é: Como determinar a incerteza de uma medida?

COMO DETERMINAR A INCERTEZA DE UMA MEDIDA?

Uma abordagem estatística para este problema, é medir várias vezes a mesma grandeza e calcular sua *média (aritmética)* dada pela equação 1.1. Nas condições dos nossos trabalhos experimentais[8], *a média é a melhor estimativa do valor mais provável de um conjunto de medidas*. Posto de outra forma: a média aritmética é uma conta, cujo resultado mais se aproxima do valor mais provável de uma medição (o valor mais perto do valor verdadeiro, mas que só se alcança após infinitas medições).

Média de um conjundo de medidas com *n* valores:

$$m = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad (1.1)$$

Uma vez que as medidas são em geral todas diferentes entre si, sua variabilidade ou dispersão, pode ser calculada estimando o *desvio padrão* das medidas, dado pela equação 1.2. O desvio padrão é uma espécie de média das diferenças quadráticas de cada medida até a média.

Estimativa do desvio padrão de um conjunto de *n* medidas de uma grandeza:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - m\right)^2} \qquad (1.2)$$

Alguns comentários:

O valor mais provável de uma grandeza (μ), assim com seu desvio padrão (σ), só pode ser obtido com infinitas medições ($n \to \infty$). Definitivamente não temos tempo para isso! Uma vez que nosso tempo é finito, podemos apenas **estimar** o valor mais provável (m), o desvio padrão (s) por meio das equações (1.1) e (1.2). O desenvolvimeto teórico e a justificativa para esse procedimento podem ser encontrados em livros texto básicos de estatística, como, por exemplo, Helene e Vanin (1981).

Na equação (1.2) a média das diferenças quadráticas foi feita para (*n-1*) graus de liberdade. Em cálculos estatísticos, denominamos *graus de liberdade* de um conjunto finito de valores, a quantidade de valores independentes. Um valor é independente do outro quando, dado o primeiro, não há forma de determinar o segundo. Jogando dados por exemplo, não há meio de prever o resultado da próxima jogada. São resultados independentes. Mas na equação (2.1), em que se usa a média dos *n* valores, é possivel prever o valor da *enésima* medida assim que soubermos as *n-1* medidas anteriores. Assim, perdemos um grau de liberdade e por isso, dividimos a soma por *n-1*.

Poderíamos, em princípio, calcular a dispersão de um conjunto de medidas em torno da média, apenas somando as diferenças de cada medida à média, sem o quadrado na equação (1.2). Ocorre, que o resultado dessa operação é identicamente nulo! (Tente provar essa afirmação.)

Vimos até agora que a variabilidade ou dispersão dos resultados de uma medição pode estimada pelo *desvio padrão*. Também aprendemos que a média de um conjunto de medidas é a melhor estimativa para o resultado de nossa medição. Certamente pretendemos usar a média das nossas medidas para expressar o resultado de nossas medições. Portanto, nossa pergunta agora é: como determinar a **incerteza da média**?

[8] Supondo uma amostra aleatória simples de uma população normalmente distribuída.

Podemos intuir que a incerteza da média deve ser menor que a incerteza de uma única medida. Ora, se tivéssemos muitas médias, poderíamos simplesmente determinar a dispersão das médias estimando o *desvio padrão das médias* como na equação (1.2), apenas substituindo as medidas (x) pelas médias e a média (m) pela média das médias. Isso pode ser feito algebricamente e o resultado é surpreendentemente simples, representado pela equação (1.3).

Estimativa do desvio padrão das médias de *n* valores:
$$s_m = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n}\sum (x_i - m)^2} = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1.3)$$

Como pode ser visto, uma vez calculado o desvio padrão de um conjunto de medidas, o *desvio padrão da média* é obtido dividindo o desvio padrão por $\sqrt{n}$. O *desvio padrão da média*, é um excelente candidato para expressar a *incerteza da média* de um conjunto de medidas[9]. Dessa forma, usando a notação convencional, podemos expressar o resultado de um conjunto de n medições como

Expressão do resultado de *n* medições: $m \pm s_m$

Note que, nesse caso, ao relatar a média e o desvio padrão da média, é também importante citar o número n de medições realizadas.

DESVIO PADRÃO **Parâmetro que caracteriza a dispersão das medidas e expressa a qualidade das medições.** **DESVIO PADRÃO DA MÉDIA** **Expressa a incerteza do <u>valor médio</u> de *n* medições em condições de repetitividade.**

E se tivermos apenas uma única medida? Aí não tem jeito! Com apenas uma medição não não há como determinar o desvio padrão do processo de medição. Nesse caso, ou usamos a metade da menor divisão

[9] É comum encontrar a afirmação de que se fazem muitas medições de uma mesma grandeza para melhorar o resultado. Em geral isto é falso. A incerteza de um processo de medida é uma <u>característica do processo</u> que pode ser expresso pelo desvio padrão e independe do número de medidas (para n grande, típicamente n>10). É verdade que ao realizar muitas medições pode-se obter um valor médio mais próximo do valor mais provável para um dado processo e instrumento de medida, uma vez que o desvio padrão da média (que expressa a incerteza da média) varia com $1/\sqrt{n}$, onde n é o número de medidas. Todavia, mesmo com infinitas medições, com um mesmo instrumento, não é possível compensar possíveis erros de calibração ou de medida inerentes ao processo, em geral, contidos na incerteza do instrumento. Raramente se usa essa abordagem em medidas diretas (não estocásticas). Na prática, quando se deseja uma medida com incerteza menor, procura-se simplesmente um procedimento ou um instrumento melhor (um micrômetro no lugar de uma régua, por exemplo) e se usa a metade da menor divisão da escala para expressar a incerteza da medida. A principal razão de se repetir uma medida várias vezes é para estimar o desvio padrão do <u>processo</u> de medição em que a metade da menor divisão da escala ou não é adequada, ou não é acessível. No caso de medidas estocásticas, no jogo de dados, decaimentos radioativos, espectroscopias, etc, ocorre de fato a redução da precisão relativa do resultado, *s/m* com o número de medidas. É um caso particular em que a precisão relativa da medida melhora com o número de eventos observados.

da escala, ou "chutamos" uma incerteza razoável (até possível com um pouco de prática), ou só nos resta repetir as medições algumas vezes, determinar a média e o desvio padrão da média.

1.5. Um exemplo prático

Suponha que, usando um cronômetro eletrônico, tenhamos realizado um conjunto de medições do tempo de queda de um corpo. No quadro 1 estão os resultados de nossas medições. A incerteza nominal do cronômetro foi de 0,05 ms.

Quadro 1: Tempos de queda de um corpo (ms)

4.93	0.77	7.01	3.83	5.40
2.21	6.00	5.17	4.12	2.56

Com os dados do quadro 1, podemos calcular:

Média dos tempos de queda:	$\langle t \rangle = 4,20$ ms,
Desvio padrão:	$s = 1,9$ ms e
Desvio padrão da média:	$s_m = 0,6$ ms

Portanto, o tempo de queda médio para 10 medições pode ser escrito como: $t = 4,2 \pm 0,6\ ms$. Convém notar que:

a) A incerteza da média, dada pelo desvio padrão da média, é muito maior que a do cronômetro. Isto porque o desvio padrão inclui flutuações e variabilidades próprias do processo de medição que *incluem* a incerteza do instrumento.
b) O tempo de queda médio foi escrito com apenas uma casa decimal, da mesma forma que sua incerteza.
c) O desvio padrão e o desvio padrão da média têm dimensão física (igual a da média).

HISTOGRAMA

Podemos também representar esses resultados de forma gráfica. Para isso usaremos um histograma. Neste tipo de gráfico, representaremos a grandeza medida no eixo *x* dividido em intervalos de <u>igual comprimento</u>, que chamaremos *celas*[10]. No eixo *y*, representaremos a *frequência absoluta*, (f_a) ou seja, o número de medidas que ocorreram no intervalo definido pela cela.

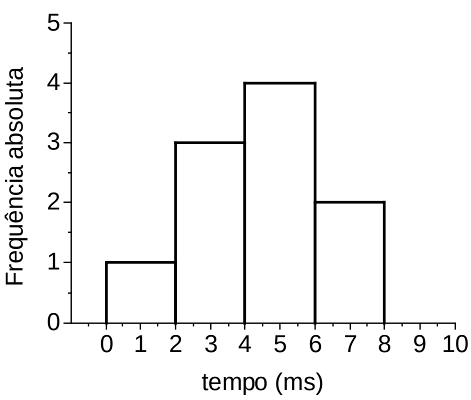


Figura 3. Histograma de frequência absoluta dos tempos de queda de um corpo.

[10] *Bin* em inglês. O tamanho da cela também pode ser variável. Adotamos celas de tamanho fixo apenas para simplificar o exemplo.

Inspecione o gráfico da Figura 3 e responda: Quanto vale a área total do gráfico?

a) 10
b) 20
c) 10 ms
d) 20 ms

Acertou se você optou por ***20 ms***. Esse resultado tem vários problemas. Depende da escala do eixo *X*, do tamanho da cela, do agrupamento dos pontos, tem dimensão e nenhum significado físico! Seria melhor termos um gráfico cuja área tenha algum significado físico, tal como a probabilidade da medida ocorrer num intervalo de valores. Ou seja, nesse caso, poder determinar que a 30% das medidas estão no intervalo de 2 a 4 ms, que equivale afirmar que a integral do histograma, tomada entre 2 e 4ms, vale *0,3* (adimensional). Dessa forma, a área total do histograma é igual a *1 (um)*, 100% de chance do evento ocorrer[11].

Há 3 grandezas que podem ser graficadas na forma de um histograma:

a) freqüência absoluta: $f_a = \Delta n$,

b) freqüência relativa, ou probabilidade: $f_r = \Delta P = \Delta n/N$ *e*

c) densidade de probabilidade: $\Delta P / \Delta x$

onde Δn é o número de ocorrências numa cela, *N* é o número total de ocorrências e Δx é o tamanho da cela. Num histograma de *freqüência absoluta*, o eixo y representa a quantidade absoluta de ocorrências dentro de uma cela, no de *freqüência relativa* (ou probabilidade) o eixo y representa a fração da quantidade de eventos dentro da cela. No gráfico de *densidade de probabilidade* o eixo y vale ($\Delta P/\Delta x$). Note que, apesar da frequência relativa (*fr*) já ser a probabilidade procurada, a área do gráfico de frequência relativa ainda tem a dimensão do eixo *X*. Dentre os três, apenas o histograma da *densidade de probabilidade* tem área adimensional e igual à frequência relativa. Este último tem a vantagem da área total independer do tamanho da cela, valendo até mesmo para histogramas com tamanho de cela variável, pois a área total é sempre unitária! Para auxiliar a construção dos histogramas, os dados do quadro 1 foram recalculados na tabela 1.

Tabela 1: Análise estatística dos tempos de queda de um corpo.

Cela	Intervalo (ms)	$f_a = \Delta n$	$f_r = \Delta P = f_a/N$	$\Delta P / \Delta x$
1	0,0 |— 2,0	1	0,10	0,05
2	2,0 |— 4,0	3	0,30	0,15
3	4,0 |— 6,0	4	0,40	0,20
4	6,0 |— 8,0	2	0,20	0,10

Note que *N* = 10 é o número total de ocorrências e o intervalo, representado pelo símbolo "|—" inclui o extremo esquerdo e exclui o direito. Graficamos os histogramas de frequência absoluta, relativa e a densidade de probabilidade na figura 4.

Os histogramas abaixo são aparentemente todos iguais! A única coisa que varia é a escala e a dimensão do eixo *Y*. Isso tudo foi necessário para normalizar os dados de tal forma que possamos ajustar-lhes uma função contínua, a *função densidade de probabilidade*, que descreve a distribuição de resultados de uma experiência. Uma função muito usada para resultados aleatoriamente distribuídos e que ainda nos fornece parâmetros com significado físico é a função *Gaussiana*, dada pela equação (1.4).

[11] Note que não faz sentido perguntar qual a probabilidade de ocorrer um determinado valor de medida. Probabilidades só podem ser associadas a intervalos de medidas.

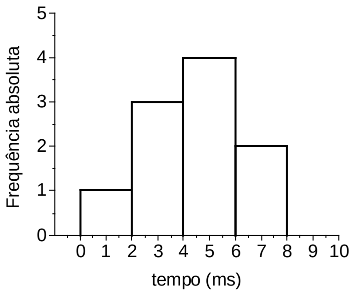


Figura 4a. Histograma de frequência absoluta dos tempos de queda de um corpo.

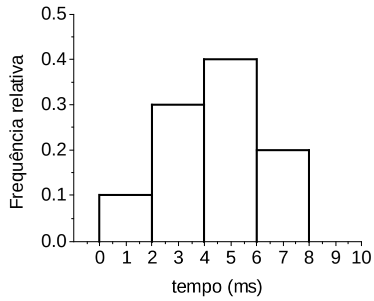


Figura 4b. Histograma de frequência relativa dos tempos de queda de um corpo.

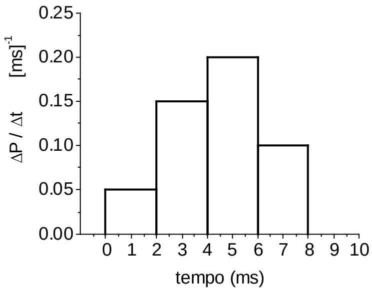


Figura 4c. Histograma de densidades de probabilidade dos tempos de queda de um corpo.

$$G(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{1.4}$$

onde σ é denominado largura da Gaussiana e pode ser associado ao desvio padrão dos dados e μ é a tendência central (ou posição do pico) da Gaussiana e é associado à média dos dados. O expoente da exponencial na função G(x) é necessariamente adimensional, mas a função G(x) tem a dimensão do inverso do desvio padrão (ou da média).

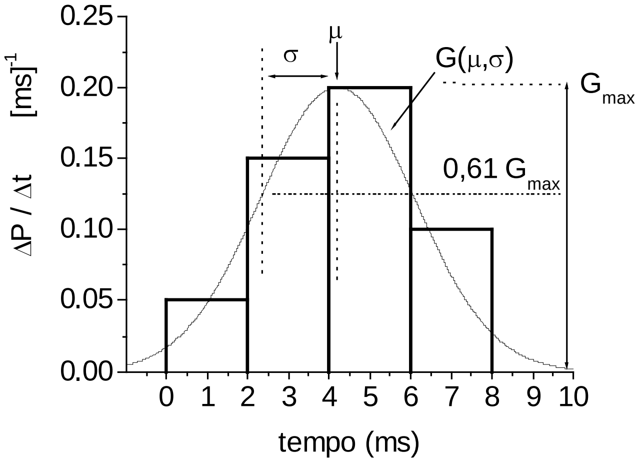


Figura 5. Função densidade de probabilidade gaussiana ajustada aos dados experimentais.

No gráfico da figura 5, a coincidência da altura máxima da Gaussiana com a altura máxima do histograma é acidental, mas a coincidência das áreas do histograma e da gaussiana é proposital e vale 1 (um). Com nossos dados experimentais, a função densidade de probabilidade ajustada aos dados experimentais, é dada por:

$$G(x)=\frac{1}{1{,}90\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x\,-\,4{,}20}{1{,}90}\right)^2} \tag{1.5}$$

A interpretação gráfica de μ e σ é simples. μ é a coordenada *X* do centro da gaussiana que pode ser associada à média das medidas no histograma e σ (sigma) é a metade da largura da gaussiana tomada a 0,61 da altura máxima. Isso pode ser demonstrado calculando o valor de G(x | x-μ = σ)[12]. Nesse caso,

$$\frac{G(x\,|\,x-\mu=\sigma)}{G_{max}} = e^{-\frac{1}{2}} = 0{,}61$$

onde G_{max} o valor de G(x) quando x = μ. Daí concluímos que o desvio padrão pode ser obtido graficamente, medindo a metade da largura da distribuição ajustada, a 0,61 da altura máxima.

Com a gaussiana ajustada, isto é, uma vez calculados μ e σ, fica fácil calcular a probabilidade de ocorrer um evento em qualquer intervalo [a,b], perto ou longe da média de nossas medidas. Basta calcular:

$$\Delta P_{a,b} = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \qquad (1.6)$$

O único problema é que a função Gaussiana não possui integral analítica. Sabemos apenas que $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx = 1$. Para o resto teremos que usar tabelas ou integrar numericamente.

1.6. Referências e bibliografia

Diretório Central dos Estudantes. *Normalização de trabalhos acadêmicos & referências bibliográficas.* 2ª. Ed. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. - (1998). 52p

Fernandes, Normando C. O laboratório de projetos: inúmeras variações sobre o mesmo tema. *Preprint IFUSP*/ P-564. (1986).

Frota, Maurício Nogueira, Ohayon, Pierre. eds. *Padrões e Unidades de Medida - Referências Metrológicas da França e do Brasil.* INMETRO - Rio de Janeiro: Qualitymark Ed. 1999. 120p

Helene, Otaviano A.M. e Vanin, Vito R. *Tratamento estatístico de dados em física experimental*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 1981.

INMETRO, SBM. *Guia para expressão da incerteza de medição*. ABNT, Rio de Janeiro. (1998). 120p

Referências Bibliográficas de Multimeios e Documentos Eletrônicos. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. Projeto Disque-Biblio, (1998) 19p.

Saad, Fuad Daher, Yamamura, Paulo; Watanabe, Kazuo . *Introdução a interpretação gráfica de dados, gráficos e equações*. 25p. IFUSP (sem data).

Vuolo, José Henrique. *Fundamentos da teoria de erros*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 2a Ed. 1992.

Yamamura, Paulo e Watanabe, Kazuo *Instrumentos de Medição in Manuais Didáticos de Física*. 18p. IFUSP (sem data).

[12] Traduzindo: calculando o valor de G(x) para x tal que x-μ = σ

2. PROPAGAÇÃO DE ERROS E INCERTEZAS

2.1. Introdução

Um *processo de medição* tem sempre por objetivo determinar o *valor médio verdadeiro,* y_{mv}, de uma *grandeza,* cujo *valor verdadeiro* é y_v. Acontece que, em geral, o valor verdadeiro é desconhecido. O problema ainda é mais grave, pois para obter o *valor médio verdadeiro* de uma grandeza, são necessárias infinitas medições!

Dessa forma, para um conjunto de medidas, $\{y_1, y_2, y_3, ...y_n\}$, o *valor médio verdadeiro* é dado por:

$$y_{mv} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \qquad (2.1)$$

Como em geral y_{mv} é um valor inacessível, usam-se *estimativas*: a média dada pela equação 1.1, a estimativa do desvio padrão (eq. 1.2) e do desvio padrão da média (eq. 1.3).

Apenas relembrando e seguindo a recomendação do Guia para Expressão de Incertezas (Inmetro, 1998), vamos definir alguns termos que usaremos com frequência:

MENSURANDO: Grandeza a ser determinada num processo de medição.

VALOR VERDADEIRO: Valor consistente com a definição de uma determinada quantidade. Em princípio, apenas obtido num processo de medição perfeito, que em geral não existe.

INCERTEZA: Parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem satisfatoriamente ser atribuidos ao mensurando. Reflete o desconhecimento do valor exato do mensurando.

ERRO: É a diferença entre a medida e o valor verdadeiro. Quanto menor o erro, maior a *exatidão* (*acurácia*).

ERRO SISTEMÁTICO: Erro constante característico do processo ou instrumento.

ERRO PADRÃO: Desvio padrão dos *valores médios* em relação ao valor verdadeiro. Outro parâmetro quase impossível de ser determinado.

A grande diferença entre a incerteza e o erro (seja ele qual for) é que o erro pode, em princípio, ser corrigido enquanto que a incerteza define um intervalo em que as medidas irão ocorrer com alguma probabilidade. Logo, caso sua experiência tenha um erro, existe uma falha no procedimento que pode e deve ser corrigido.

Exemplo 1. Medida da tensão de uma pilha:

Neste exemplo, pretendemos determinar o valor mais provável e a respectiva incerteza da tensão de uma pilha. Usaremos um voltímetro cuja incerteza nominal (fornecida pelo fabricante) é de 1σ = 0,25% do valor indicado. A incerteza do processo de medição deve, portanto, ser combinada com a incerteza do fabricante, para gerar o resultado procurado. Algumas fórmulas utilizadas serão explicadas adiante. Retorne ao exemplo assim que terminar a leitura deste capítulo. As medidas realizadas estão na Tabela 2.1.

Tabela 2.1. Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

n	U (volt)	Incerteza nominal (V)
1	1,572	0,004
2	1,568	0,004
3	1,586	0,004
4	1,573	0,004
5	1,578	0,004
6	1,581	0,004

Antes, um comentário: a tabela 2.1 acima tem três colunas. A última contém a incerteza nominal das medidas que, como vemos, não varia ao longo das medidas. A tabela poderia ter apenas 2 colunas e a incerteza das medidas ser incorporada no título da coluna 2. A nova tabela ficaria como no exemplo abaixo, tabela 2.1b.

Tabela 2.1b. Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

n	U ± 0,004 (V)
1	1,572
2	1,568
3	1,586
4	1,573
5	1,578
6	1,581

Vamos aos cálculos. Note que em cálculos intermediários usaremos um dígito significativo a mais, para apenas no final, expressarmos o valor da medição conforme as normas discutidas no capítulo anterior. Lembre-se que todos os cálculos são "estimativas estatísticas" isto é, foram realizados com um *número finito* de medições.

Valor médio: $$\overline{U} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} U_i = 1{,}5763 \text{ V}$$

Desvio padrão das medidas: $$s = \sqrt{\frac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}(V_i - 1{,}5763)^2} = 0{,}0066 \text{ V}$$

Desvio padrão do valor médio: $$s_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}0066}{\sqrt{6}} = 0{,}0027 \text{ V}$$

Incerteza nominal do voltímetro (0,25% da medida) $$L_r = \left(\frac{0{,}25}{100}\right)1{,}5763 = 0{,}0039 \text{ V}$$

Verifique que o desvio padrão das medidas (na realidade do <u>processo de medição</u>) é maior que a incerteza nominal do voltímetro. Isso era esperado, pois, na composição da incerteza do processo de medição, a incerteza do voltímetro é apenas um dos componentes. Se tivéssemos realizado apenas uma medição, não haveria como saber o desvio padrão do processo de medição. Sabemos apenas a incerteza do voltímetro. Dessa forma, a primeira medida na tabela 2.1b, deveria ser expressa como:

$$\boxed{U_1 = (1{,}572 \pm 0{,}004)\text{V}}$$

Se por alguma razão soubermos o desvio padrão do processo de medição, mas mesmo assim dispormos de uma única medida, podemos expressá-la como:

$$\boxed{U_1 = (1{,}572 \pm 0{,}007)\mathrm{V}}$$

Nesse caso, a incerteza de nossa medida difere da incerteza nominal do voltímetro porque incorpora a dispersão dos resultados dp processo de medição *determinado de alguma forma anteriormente*.

No nosso exemplo, uma vez que realizamos uma série de 6 medições, podemos expressar nosso resultado de forma mais precisa, usando o valor médio das seis medidas e o desvio padrão da média. Portanto nosso resultado, de seis medições, fica assim:

$$\boxed{\overline{U} = (1{,}5763 \pm 0{,}0027)\mathrm{V}}$$

Este resultado está ótimo para desenvolver nossos estudos e verificar alguma dependência da tensão da pilha com outras grandezas. Mas o nosso voltímetro pode ter um <u>*erro de calibração*</u>. Explicando: Na fábrica são produzidos milhares de voltímetros. Em média todos iguais. Mas no varejo, ao comparar os valores medidos por diferentes voltímetros, um indica um valor um pouco maior, outro um pouco menor... Como então comparar medidas feitas com <u>voltímetros diferentes</u>? Temos que retornar ao manual do aparelho e procurar sua incerteza de calibração, ou seja, o desvio padrão de calibração dos voltímetros fornecido pelo fabricante. Em geral (mas não necessariamente) a incerteza do instrumento e o desvio padrão de calibração são semelhantes. Seria um desperdício se assim não fosse. (*Quem compraria um aparelho muito preciso e caro, mal calibrado? Por que calibrar cuidadosamente um aparelho de baixa qualidade?*). Podemos supor então que o desvio padrão de calibração do voltímetro é da mesma ordem que sua incerteza nominal. No caso do nosso voltímetro, é possível que *instrumentos diferentes indiquem valores diferentes* para uma mesma medição, com um desvio padrão de 0,004V. Caso queiramos comparar nossas medidas com a de outros laboratórios (ou apenas feitas com outros voltímetros), temos que incorporar esse "desvio padrão de calibração" em nosso resultado. Isso pode ser feito por meio de uma soma quadrática, denominada de *erro padrão*, em que se compõe quadraticamente o desvio padrão da média com o desvio padrão nominal de calibração do instrumento:

Erro padrão: $$s_p = \sqrt{s_m^2 + L_r^2} = 0{,}0048\mathrm{V}$$

onde L_y é a incerteza do instrumento. O *erro padrão* mostra como não adianta realizar enorme número de medições com o nosso voltímetro com o intuito de reduzir a incerteza da medição (o desvio padrão da média). No limite estaremos sempre presos à incerteza nominal do instrumento.

Incorporando a incerteza nominal do voltímetro em nossa medição, o valor mais provável da tensão da pilha pode ser representado por:

$$\boxed{\overline{U}_P = (1{,}5763 \pm 0{,}0048)\mathrm{V}}$$

Afinal, qual o resultado que devemos usar? Depende. Para comparar várias séries de medições realizadas com o mesmo instrumento, podemos usar a média $\overline{U}$ e o desvio padrão da média. Para comparar duas medidas entre si, usamos a incerteza do instrumento (ou o desvio padrão, caso seja conhecido). Para comparar medidas em instrumentos diferentes, precisamos do erro padrão.

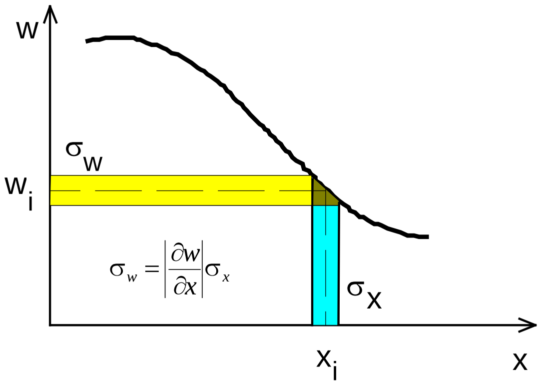
2.2. PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Muitas vezes usaremos o valor de uma medição numa equação para determinar uma outra grandeza qualquer. O que fazer com a incerteza associada? Para o mensurando temos a incerteza do processo de medição, enquanto que para grandezas determinadas através de fórmulas temos a incerteza propagada.

2.2.1. Cálculo da propagação de incertezas

O problema pode ser posto da seguinte maneira: dada uma função $w = w(x, y, z)$ onde x, y, z são grandezas experimentais com incertezas dadas por σ_X, σ_Y, σ_Z e independentes entre si, quanto vale σ_w ? A independência entre σ_X, σ_Y, σ_Z é necessária para a validade das fórmulas a seguir, mas não será discutida por enquanto.

Para simplificar suponha *w* apenas função de *x*. No gráfico abaixo está representado *w(x)*.



A incerteza de w, neste gráfico, pode ser obtida pela simples projeção linear da incerteza de x. Para pequenos intervalos no eixo x, temos em primeira ordem[13]:

$$\sigma_w = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| \sigma_x \qquad (2.2)$$

Apenas recordando: se σ_X e σ_Y forem os catetos do pequeno triângulo formado junto à curva, a razão σ_Y / σ_X pode ser aproximada pela derivada em *x* da função *w(x)*. Numa função de muitas variáveis *w(x, y, z)*, com *x, y e z* independentes entre si[14], a derivada para apenas uma coordenada é uma derivada parcial, como a equação (2.2).

Para mais de uma variável, todas independentes entre si, podemos escrever uma fórmula geral (visualize uma soma de catetos em n dimensões):

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \ldots \qquad (2.3)$$

Acompanhe os exemplos a seguir:

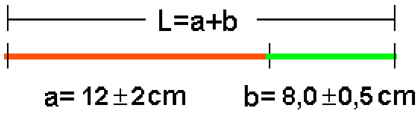
---

[13] Usamos uma aproximação linear para projetar a incerteza de x em w. O procedimento é adequado para $\Delta f(x) << \sigma_x$.

[14] Nessa introdução veremos apenas o caso em que os argumentos de w são independentes entre si. Quando os parâmetros têm relação de dependência é necessário determinar os coeficientes de correlação entre os parâmetros. Consulte textos mais avançados.

A) Adição de valores experimentais

Considere a soma de dois segmentos. Note que a incerteza indicada após o símbolo ± pode ser de qualquer tipo (incerteza nominal, desvio padrão, desvio padrão da média, erro padrão, etc..). A propagação de incertezas como aqui discutida é auto-consistente.



A incerteza no segmento soma pode ser calculada aplicando a equação (2.3):

$$\sigma_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2$$
$$= \ 1.\sigma_a^2 + 1.\sigma_b^2$$

que resulta:

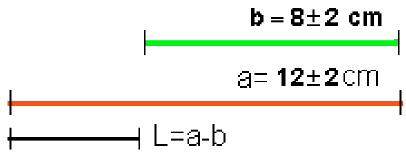
$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0{,}5^2 = 4{,}25$$
$$\sigma_L = 2{,}06\, cm$$

Logo

L = (20,0 ± 2,1) cm

B) Subtração de valores experimentais

Seguindo o mesmo esquema do exemplo anterior, a incerteza associada à subtração de duas grandezas experimentais é dada por:



Novamente, usando a equação (2.3):

$$\sigma_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2$$
$$= 1.\sigma_a^2 + 1.\sigma_b^2$$

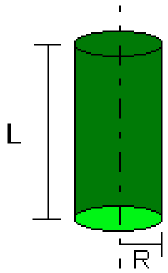
resulta:
$$\sigma_L^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$
$$\sigma_L = 2{,}8\, cm$$

Logo **L = (4,0 ± 2,8) cm**

Note que na **soma**, tanto a grandeza como a incerteza aumentaram, mas na **diferença** de duas grandezas experimentais, apesar do resultado ser menor em módulo, a incerteza final é maior que a das partes.

C) Multiplicação de grandezas experimentais: volume de um cilindro

Vamos agora determinar o volume do cilindro na figura abaixo em que se mediram o raio e a altura.



$V = \pi R^2 L$

$R = 2{,}0 \pm 0{,}5$ cm

$L = 10{,}0 \pm 0{,}5$ cm

Propagaremos as incertezas em todos os termos do produto: π, R e L.

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 \sigma_\pi^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2$$
$$= (R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2)\sigma_L^2$$

dividindo por V^2

$$\frac{\sigma_V^2}{V^2} = \frac{(R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2)\sigma_L^2}{(\pi R^2 L)^2}$$
$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2$$

Calculando cada um dos termos acima usando os valores fornecidos na figura:

$$\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right) = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$2\left(\frac{\sigma_R}{R}\right) = \frac{1}{2{,}0} \qquad \text{(ii)}$$

e

$$\left(\frac{\sigma_L}{L}\right) = \frac{0{,}5}{10{,}0} \qquad \text{(iii)}$$

Somando i, ii e iii em quadratura:

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{0^2 + 0{,}5^2 + 0{,}05^2} = 0{,}5025$$

MUITO IMPORTANTE: Na equação acima, de propagação de incertezas na multiplicação e divisão, obtivemos a incerteza relativa σ_V / V. NÃO ESQUEÇA DE MULTIPLICÁ-LA PELO RESULTADO (*V*) PARA OBTER A INCERTEZA ABSOLUTA. Multiplicando σ_V por V e ajustando o número de significativos...

$$\sigma_V = 0{,}5025 \times V = 0{,}5025 \times 125{,}7 = 63$$

O resultado do volume do cilindor vale:

V = (126 ± 63) cm³

ou ainda

V = (13 ± 6) x 10 cm³

Os resultados acima são mais gerais do que parece à primeira vista. Para as quatro operações e variáveis independentes entre si, podem ser resumidos como segue:

Na soma ou subtração, a incerteza absoluta do resultado é a soma em quadratura das incertezas absolutas.

Na multiplicação ou divisão, a incerteza relativa do resultado é dada pela soma em quadratura das incertezas relativas dos operandos (não esqueça de converter a incerteza relativa em absoluta, quando expressar o resultado final).

NOTA: por *soma em quadratura* entende-se a raiz quadrada da soma dos quadrados.

No Quadro 2.1, a seguir, estão resumidos os principais casos de propagação de incertezas para grandezas independentes entre si. À primeira vista parece um interminável mar de contas. Podemos simplificar muito nosso trabalho se notarmos que o resultado de propagação de incertezas não precisa ser feito com precisão numérica maior que cerca de 5%. Explicando melhor. Tomemos novamente a soma quadrática dos três termos do volume do cilindro.

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{0^2 + 0{,}5^2 + 0{,}05^2} = 0{,}5025$$

Note que o terceiro termo, $0{,}05^2$ quase não altera o resultado final. Ou seja, poderia ter sido desprezado. Suponhamos que, na soma de quadrados, possamos desprezar qualquer termo menor que, digamos, 10% do termo maior. Desejamos calcular

$$s^2 = a^2 + b^2$$

e desprezar o termo b^2 caso $b^2 < 0{,}1 \cdot a^2$. Isso resulta que $b <\sim 0{,}3 \cdot a$ ou seja, $b <\sim \frac{a}{3}$. Logo

Qualquer termo *menor que 1/3 do maior termo* na soma em quadratura pouco contribui no resultado final e em geral, pode ser desprezado.

Exemplificando: Volte para o exemplo A, a soma de dois segmentos: Lá calculamos o resultado de :

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0{,}5^2 = 4{,}25$$

observe que $0{,}5^2 << 2^2$, ou seja, se desprezarmos o termo menor, o resultado seria 4,00, que arredondado para um significativo resultaria $\sigma_L = 2\,cm$, não muito diferente do resultado anterior, 2,1 cm.

Isto permite, na maioria das vezes, um cálculo rápido, sem o uso de calculadora. Atente que são os termos da soma em quadratura que devem ser comparados, não as incertezas.

2.3. Representação de incertezas em um gráfico. Barras de erro.

Já aprendemos a expressar incertezas quando escrevemos o resultado de uma medição. Num gráfico vamos expressar a incerteza de cada ponto experimental na forma de uma barra vertical (ou horizontal) que representará o intervalo de confiança definido pela incerteza da grandeza.

Como exemplo, vamos representar os dados da tabela 2.2. em um gráfico. É comum incluir numa tabela de dados uma coluna com um número de ordem. Isso permite, por exemplo, numa discussão, comentar a *medida 3*, ao invés da medida cujo *espaço é 11,10*.

Tabela 2.2. Espaços e velocidades de um corpo.

n	s ± 0,05 (m)	v (m/s)
1	4,60	1,84±0,55
2	6,90	2,76±0,82
3	11,10	3,99±1,20
4	20,60	9,88±2,96

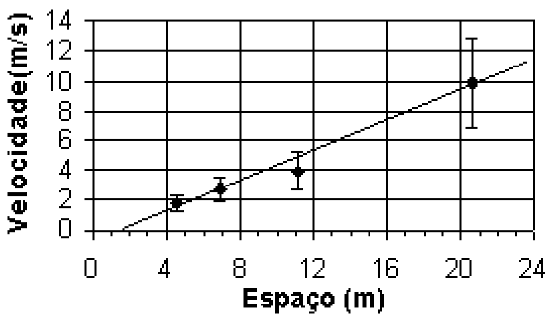


Figura 2.1 Velocidades e posições de um corpo.

No gráfico da figura 2.1, a incerteza do espaço **não** foi colocada, pois é menor que o ponto marcado. Neste gráfico também foi ajustada uma reta média que representa os pontos experimentais. A reta média pode ser traçada à mão, observando algumas regras simples:

- Procure passar a reta equilibradamente pelo maior número de pontos.
- A origem (0; 0) pode ou não ser um ponto experimental. Se for fisicamente justificável, trate-a como qualquer outro ponto experimental (inclusive com incerteza), caso contrário trace a melhor reta ignorando a origem.
- A reta deve estar contida na maioria das barras de erro.

Quadro 2.1. RESUMO DE FÓRMULAS PARA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS para variáveis independentes entre si.

w = w (x, y, ...)	Expressões para σ_W
w = x ± y **soma e subtração**	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ **somar as incertezas absolutas em quadratura**
w = axy **multiplicação**	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ **somar as incertezas relativas em quadratura**
w = a (y / x) **divisão**	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ **somar as incertezas relativas em quadratura**
w = x^m **potência simples**	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert m\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
w = ax **multiplicação por constante**	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ **ou** $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
w = ax + b	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ **ou** $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
w = ax^py^q	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = a sen(bx) **função qualquer** **<u>aplicar a definição</u>**	$\sigma_w = \lvert ab\cos(bx)\rvert\sigma_x$ $\quad b\sigma_x$ em radianos

3. LINEARIZAÇÃO DE CURVAS

3.1 Introdução

Numa experiência costumamos comparar os valores das medições com algum modelo físico, provavelmente expresso na forma de uma equação algébrica. Todavia, muitos fenômenos não são lineares, isto é, não podem ser descritos por uma reta. Nestes casos, para explicar os pontos experimentais ou ajustar uma função qualquer aos pontos experimentais requer o uso de métodos numéricos avançados nem sempre disponíveis de forma imediata. Num primeiro momento pode-se optar pela linearização da função em jogo. A linearização de uma função, nada mais é que a transformação de uma função curvílinea (não linear) numa reta, ou seja, a conversão dos dados experimentais, por meio de uma mudança de variáveis, para uma relação linear que permita ajustar uma reta e determinar-lhe os coeficientes. Invertendo o procedimento de linearização pode-se então determinar os parâmetros da função não linear procurada.

Exemplo: Para determinar a aceleração da gravidade usamos os dados de um corpo em queda livre. Inicialmente preparamos uma tabela com os tempos e espaços e construímos o gráfico a seguir:

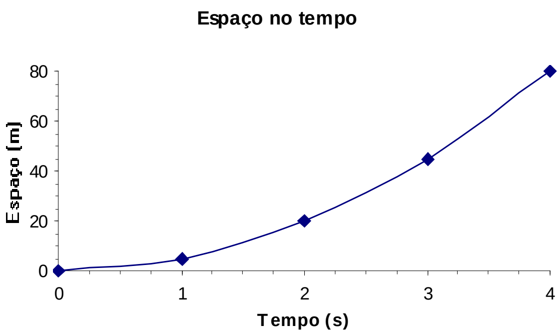


Figura 3.1. Espaços em função do tempo para um corpo em queda livre.

Neste tipo de gráfico, onde $s = s_0 + v_0.t + (a/2)t^2$, não é imediato determinar a aceleração do corpo. Mesmo tendo $v_0 = 0$ e $s_0 = 0$ (com o eixo y no sentido da aceleração) a expressão se converte em:

$$s = at^2/2 \qquad (3.1)$$

que ainda é uma **função não linear em *t*.** Se, ao invés de graficar "s x t", criarmos uma nova variável $x = t^2/2$ e graficarmos, "*s em função de x*" a equação 3.1 se converte numa <u>reta:</u>

$$s = ax \qquad (3.2)$$

Onde a é o coeficiente angular da reta, conforme pode ser visto na figura 3.2. Logo:

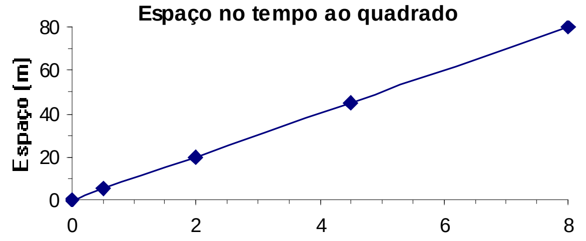


Figura 3.2. $s(t^2/2)$ para um corpo em queda livre.

Pode ocorrer que as grandezas medidas sejam afetadas por um desvio constante. No exemplo acima poderia ter ocorrido que o *tempo e/ou espaço inicial sejam diferentes de zero*. Esses desvios (inicialmente lineares), em geral introduzem desvios não lineares nas novas variáveis "linearizadas" e podem invalidar suas conclusões. Dada sua natureza, esses desvios costumam afetar mais os valores "pequenos" que os "grandes" e podem ser identificados na forma de desvio sistemático dos pontos experimentais da curva (linear) graficada.

Existem diversos outros métodos de linearização: Ainda se usa muito graficar o logaritmo das grandezas o que reduz potências em coeficientes angulares e coeficientes multiplicativos em lineares. Os papéis dilog e mono-log são uma forma prática de executar transformações log sem necessidade de cálculos. Outro método, que na prática reduz o grau da função é graficar a derivada da função. Não há uma regra geral para linearização de funções, no entanto prática e criatividade podem ajudar.

3.2 Linearizando funções tipo $y = ae^{bx}$

Funções exponenciais podem ser linearizadas aplicando o logaritmo em ambos os termos, que resulta:

$$\ln(y) = \ln(ae^{bx}) \qquad (3.3)$$

$$\ln(y) = \ln(a) + bx \qquad (3.4)$$

definindo $Y = \ln(y)$ e $A = \ln(a)$, temos:

$$Y = A + bx \qquad (3.5)$$

que é uma reta com coeficiente linear A e coeficiente angular b.

3.3. O papel gráfico logarítmico

Antes do uso generalizado de calculadoras, não era simples determinar o logarítmo de um número. Podia-se usar (e ainda se usa) o papel mono-logarítmo, cuja escala vertical, Y, é desenhada de tal forma que a distância linear até a origem (eixo x) é o **logarítmo decimal** do número indicado na escala. Dessa forma, ao localizar um valor na escala do eixo Y, o papel converte o valor para o logaritmo do número indicado.

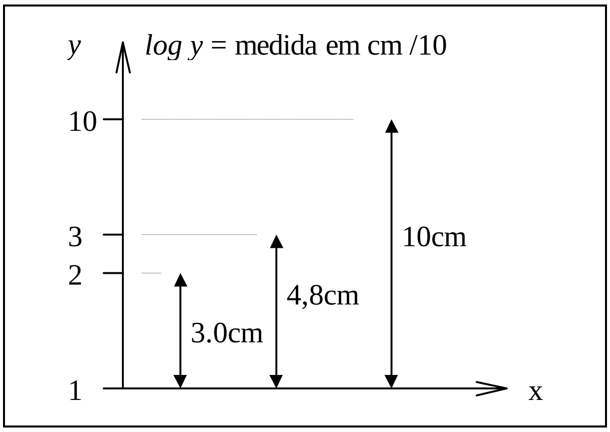


Figura 3.3. Escala mono-log. Neste caso, a escala, também denominada ciclo, é de 10cm para cada ordem de grandeza (fator 10). Outras escalas e vários ciclos são possíveis. (um exemplo: dado que log*(3)* = 0.477, temos que *10*.log*(3)* = *4.8*cm.)

O papel dilogarímico (dilog) repete o eixo log também para o eixo das abcissas (eixo x) e é útil para linearizar potências simples, tais como $y = a\sqrt{bx}$ que será discutido a seguir.

3.3. Linearização de funções tipo $y = ax^b$

Potências simples tipo y = ax^b, também podem ser linearizadas aplicando o logaritmo em ambos os termos:

$$\log(y) = \log(a) + b\log(x) \qquad (3.6)$$

novamente, uma reta com coeficiente angular *b* e coeficiente linear *log(a)*.

4. Interpolação de tabelas.

Ao consultar uma tabela, dessas publicadas em livros expecializados é muito difícil encontrar exatamente o valor procurado. Se por exemplo estivermos procurando o índice de refração de um determinado material em função da temperatura, pode ocorrer que a temperatura desejada esteja entre dois valores tabelados. A solução é interpolar a tabela. Existem vários métodos de interpolação de dados em tabelas: podemos usar polinômios, funções logaritmicas, exponenciais, etc. Esses métodos podem ser encontrados em qualquer livro básico de métodos numéricos.

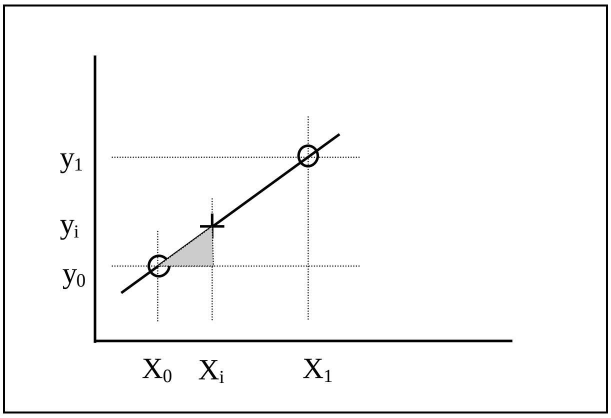
Acontece que muitas dessas tabelas são compiladas de forma que uma simples interpolação linear é suficientemente precisa, ou seja, o erro da interpolação linear é menor que a incerteza dos valores tabelados. Veja o exemplo a baixo:

Tabela 4.1. Pressão de vapor da água líquida.

Temperatura (ºC)	Pressão (Torr)
60	149,4
80	355,1
100	760
120	1489

Para determinar a pressão de vapor a 90ºC pode-se interpolar linearmente a tabela entre os valores de 80 e 100ºC. A interpolação linear pode ser entendida como o ajuste de uma reta a DOIS pontos da tabela e a determinação de um valor intermediário não tabelado. A figura 4.1 exemplifica o procedimento graficamente.

Figura 4.1. Representação gráfica de uma interpolação linear.



Sejam os pontos (x_o, y_o) e (x_1, y_1) dois pontos quaisquer consecutivos na tabela. Ajustando-lhes uma reta, pode-se escrever, para um ponto (x_i, y_i) intermediário.

$$\left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right) = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) \qquad (4.1)$$

Isolando y_i temos:

$$y_i = y_0 + (x_i - x_0).\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) \qquad (4.2)$$

que aplicada ao exemplo resulta:

$$y_{90} = 355 + (90 - 80).\left(\frac{760 - 355}{100 - 80}\right) \qquad (4.3)$$

que fornece o valor procurado:

P_{90} = 558 Torr.

4.1. Referências e fontes biblográficas

Coraci P. Malta., FAP139, *Laboratório de Física 2*. IFUSP, 1997.Textos e descrição dos equipamentos do laboaratório didático do IFUSP.

Richard P. Feynman., Robert B. Leighton, e Matthew Sands. *Lectures on Physics*, Vol. 1. 1971.

Alvin Hudson, Rex Nelson. *University Physics*, 2nd Ed. Saunders College Publishing. 1990.